December 14, 2014

離散数学 3　演習問題

$\boxed{\mathbf{1}}$ 位数が n の完全単純グラフの辺の数は $\dbinom{n}{2}$ であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ G が n 個の頂点と p 個の連結成分を持つ単純グラフであれば, G が含みうる辺の最大数は

$$\frac{1}{2}(n-p)(n-p+1)$$

であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ n 個の頂点と $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ 個より多い辺を持つ単純グラフは連結であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 図 2, 図 3, 図 4 に示されたグラフはいづれも図 1 のグラフと同型である.
それがわかる様に図 2, 図 3, 図 4 に対応する頂点と辺の記号を付せ.

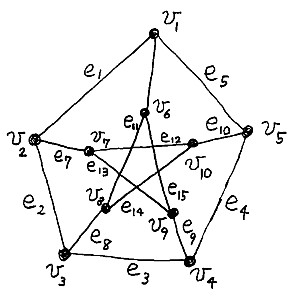


図 1

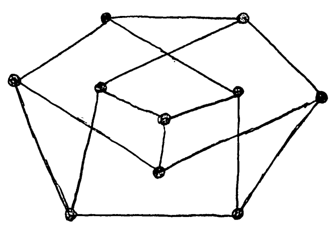


図 2

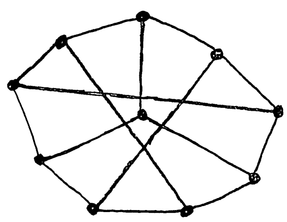


図 3

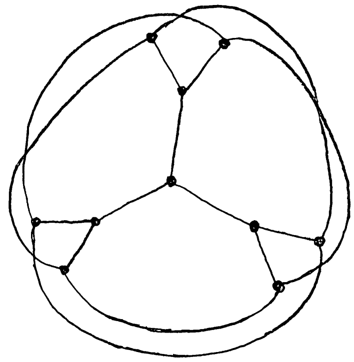
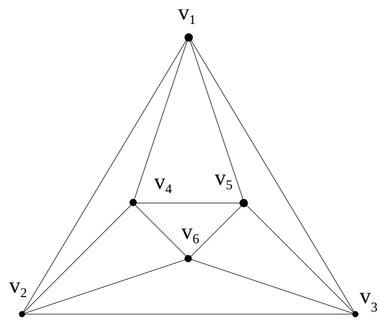


図 4

$\boxed{\mathbf{5}}$ 前問 $\boxed{\mathbf{4}}$ の図のグラフの接続行列と隣接行列を書け.

$\boxed{\textbf{5bis}}$ 下図のグラフ G について問に答えよ.

(1) 隣接行列 A を求めよ.
(2) A の対称性を利用して, A の固有多項式
$f(t) = \det(tI - A)$ を求めよ.
(3) A の固有値を求めよ.



$\boxed{\textbf{6}}$ r 正則グラフ G について, B を接続行列, A を隣接行列とせよ. このとき $BB^t = A + rI$ となることを示せ. (易しすぎ?)

$\boxed{\textbf{7}}$ 2 つの同型な平面グラフ G_1, G_2 $(G_1 \cong G_2)$ で, それぞれの双対グラフが同型とならない $({G_1}^* \ncong {G_2}^*)$ 例を与へよ. なるべく, 次数および位数の小さいグラフが望ましい.

$\boxed{\textbf{8}}$ 一般にグラフ G とその頂点 v に対し, v と隣接する頂点の集合 (v を含めない) を v の**隣接集合** (neighbours) と呼ぶ. G を有限なループを持たない単純グラフとし, G の隣接行列を A とせよ. いま, ある $r \geqq 2$ について, 同一の隣接集合をもつ r 個の頂点があるとせよ. このとき, 0 は A の固有値であり, その重複度は少なくとも $r - 1$ である. これを証明せよ.

(例：正方形. この場合 $r = 2$ と取れて, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ で固有方程式は $t^4 - 4t^2$ である.)

$\boxed{\textbf{9}}$ 一般にグラフ $G = (V, E)$ において頂点の 2 つの集合 $I, O \subset V$ があって, $V = I \cup O$, $I \neq \emptyset$, $O \neq \emptyset$, $I \cap O = \emptyset$ であり, I に含まれるいかなる 2 点も隣接せず, O に含まれるいかなる 2 点も隣接しないとする. このとき G は **2 部グラフ**であるという. グラフが 2 部グラフであるためには, 長さが奇数である様な閉路を持たないことが必要十分である. これを証明せよ.

$\boxed{\textbf{10}}$ n 個の頂点が輪の様に繋ってできているグラフ (**輪体**) C_n について, スペクトル (重複度を込めて) を以下の問に従つて求めよ.
(1) C_n の隣接行列 A_n は, 頂点の番号を適当に付ければ,

$$A_n = \begin{bmatrix} & -1 & & & & -1 \\ -1 & & -1 & & & \\ & -1 & & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & & -1 \\ -1 & & & & -1 & \end{bmatrix} \quad (n \text{ 次})$$

で与へられることを示せ.
(2) s を不定元として, 等式

$$\begin{vmatrix} s^2{+}1 & -s & & & & \\ -s & s^2{+}1 & -s & & & \\ & -s & s^2{+}1 & -s & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -s & s^2{+}1 & -s \\ & & & & -s & s^2{+}1 \end{vmatrix} = 1 + s^2 + s^4 + \cdots + s^{2n}$$

を証明せよ.

(3) A_n の固有多項式を $p_n(t)$ とおき,

$$q_n(t) = \begin{vmatrix} t & -1 & & & & \\ -1 & t & -1 & & & \\ & -1 & t & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & t & -1 \\ & & & & -1 & t \end{vmatrix}$$

とおく. このとき

$$p_n(t) = tq_{n-1}(t) - 2q_{n-2}(t) - 2$$

が成り立つことを証明せよ.
(4) 等式

$$p_n(s + s^{-1}) = (s^{2n} - 1)^2/s^n$$

を証明せよ.
(5) $\nu = 0, \cdots, n-1$ のとき, $p_n\big(2\cos\Big(\dfrac{2\pi\nu}{n}\Big)\big) = 0$ となることを示し, C_n のスペクトルを記せ.

$\boxed{\mathbf{11}}$ $D_n = (V, E)$ を $2n$ 個の頂点を持つ以下の様なグラフとせよ：
$V = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \{0, 1\}$,
$E = \{\{(i, j),\, (i+1, j)\} \,|\, i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\, j \in \{0, 1\}\} \cup \{\{(i, 0),\; (i, 1)\,|\, i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$.
このグラフの様子を図で示せ. さらに前問をこのグラフについて解け.

$\boxed{\mathbf{12}}$ $X = (V, E)$ を必ずしも有限でないグラフとせよ. もし, $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $x \in V$ について

$$\sum_{y \in V} A_{xy} \leqq N$$

となるならば, X は**次数有限**といわれる. この場合, 任意の $f \in \ell^2(V)$ に対して,

$$||Af||_2 = \left(\sum_{y \in V} |(Af)(x)|\right)^{1/2} \leqq N \cdot ||f||_2 = N \cdot \left(\sum_{y \in V} |f(x)|^2\right)^{1/2}$$

となる. 即ち, A は Hilbert 空間 $\ell^2(V)$ 上の有界作用素である. これを証明せよ. (Hint : Cauchy-Schwarz の不等式を利用せよ.)