

知念・平松 著：『有限数学入門』 p.28 の Perron-Frobenius の定理 の証明

グラフ  $G$  の隣接行列の最大固有値を  $\lambda_{\max}(G)$  と書く.

**定理 1.1.** (= 教科書 p.28 の定理 1.14)

位数  $p \geq 2$  の連結グラフ  $G$  に対して, その隣接行列を  $A$  とする. 次の (1) ~ (3) が成立する.

(1)  $G$  の任意の固有値  $\lambda$  に対して,

$$|\lambda| \leq \lambda_{\max}(G).$$

(2) 成分がすべて正なる  $\lambda_{\max}(G)$  の固有 vector が存在する.

(3) 重複度は

$$m(\lambda_{\max}(G)) = 1.$$

ここで (2) と (3) から

$$Ax = \lambda_{\max}(G)x, \quad x \neq 0$$

とするとき, ベクトル  $x$  の成分はすべて正数であるか, **すべて負である.**

証明のために, ひとつ準備をする.

**定義 1.2.**  $p$  次正方行列  $A = [a_{ij}]$  が 既約行列 であるとは, どんなな置換  $\sigma \in S_p$  によっても

$$[a_{\sigma(i)\sigma(j)}] = \begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}$$

と できない ことである. ただし,  $B$  と  $C$  は (1 次以上の) 正方行列である.

定義から, 明らかに次が成り立つ.

**補題 1.3.** 位数  $p \geq 2$  をみたく連結グラフ  $G$  に対して, その隣接行列  $A$  は既約行列である.

正方行列  $A$  の最大固有値を  $\lambda_{\max}(A)$  と書く. 定理 1.1 の証明には, 次の定理を示せばよい.

**定理 1.4.** すべての成分が負ではない実対称行列  $A$  が既約であるとき, 次の (1) ~ (3) が成立する.

(1)  $\lambda_{\max}(A) > 0$ .

(2)  $\lambda_{\max}(A)$  に付随する固有 vector  $x$  で, そのすべての成分が正であるものが存在する.

(3)  $A$  の任意の固有値  $\lambda$  に対して,

$$|\lambda| \leq \lambda_{\max}(A).$$

(4)  $\lambda_{\max}(A)$  の重複度は 1 である :

$$m(\lambda_{\max}(A)) = 1.$$

**証明**  $\lambda_{\max} = \lambda_{\max}(A)$  とおく.  $A$  は  $p$  次正方行列だとして,  $A = [a_{ij}]$  とおく.

(1)  $\text{tr}(A) \geq 0$  より  $\lambda_{\max} \geq 0$ .  $\lambda_{\max} > 0$  を示したい. いま  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_p)$  を,  $A$  の,  $\lambda_{\max}$  に付随する大きさ 1 の固有 vector とする. このとき

$$\lambda_{\max} u_i = \sum_{j=1}^p a_{ij} u_j$$

である.  $x_j = |u_j|$  とおくと p.21, line 7 の不等式から

$$(0 \leq) \lambda_{\max} = \sum_{i,j} a_{ij} u_i u_j \leq \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \leq \lambda_{\max}$$

なので, これらの  $x_j$  から得られる  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)$  について

$$\lambda_{\max} = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = (\mathbf{x}, A^t \mathbf{x}).$$

特に, すべての  $j$  について  $u_j > 0$  であるか, すべての  $j$  について  $u_j < 0$  でなければならない (これは (4) の証明で使ふ). 再び p.21, line 7 の不等式についての記述から,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)$  も  $\lambda_{\max}$  に付随する固有値である. つまり

$$(1.5) \quad \lambda_{\max} x_i = \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j.$$

もし  $\lambda_{\max} = 0$  であれば, 上の式からすべての  $a_{ij} = 0$  であるか, さもなくば少くともひとつの  $j$  について  $x_j = 0$  となる. そこで順序を交換して

$$(1.6) \quad \begin{aligned} x_j &> 0 \quad \text{for } j = 1, \dots, m \\ x_j &= 0 \quad \text{for } j = m+1, \dots, p \end{aligned}$$

とせよ.  $\sum_j a_{ij} x_j = 0$  だから  $a_{ij} = 0$  ( $j \leq m$ ) である. これは  $A$  が既約でないことを示す. 以上により  $\lambda_{\max} > 0$  である.

(2) 上で定義した  $\mathbf{x}$  について,  $x_j = 0$  となる番号  $j$  が存在するとして, (1.6) が成り立つてみるとする. このとき (1.5) から  $i > m$  ならば  $\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j = 0$ . よつて  $i > m > j$  ならば  $a_{ij} = 0$ . これは  $A$  が既約でないことを示す.

(3)  $\lambda$  を任意の固有値とし,  $\lambda$  に対応する大きさ 1 の固有 vector  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p)$  とすれば

$$\lambda = \sum_{i,j} a_{ij} v_i v_j$$

なので, p.21, line 7 の不等式から

$$|\lambda| = \left| \sum_{i,j} a_{ij} v_i v_j \right| \leq \sum_{i,j} a_{ij} |v_i| |v_j| \leq \lambda_{\max}.$$

(4)  $m(\lambda_{\max}) > 1$  であるとして,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_p)$  と  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p)$  を互いに直交する  $\lambda_{\max}$  の固有 vectors とせよ. このとき (1) と同じ議論で, すべての  $u_j > 0$ , または, すべての  $u_j < 0$  である. これは  $v_j$  についても同じ. よつて  $\mathbf{u}$  と  $\mathbf{v}$  の内積が 0 になることはできない.  $\square$