

定理 1.13 の補足

(2) 「 G が連結 $\implies m(r) = 1$ 」 を証明する. G が連結なので,

$$A\mathbf{x} = r\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

となる \mathbf{x} が存在する. $\mathbf{x} = {}^t(x_1, \dots, x_p)$ とする. 頂点の番号を付け替へることで,

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_p$$

としても一般性を失なはない. (教科書のような絶対値を考へる必要はない.)

$$\left(\begin{array}{l} \text{例へば, 頂点 } v_1, v_2, v_3 \text{ を入れ替へて, } \mathbf{x} \text{ を } {}^t(x_2, x_3, x_1, x_4, \dots, x_p) \text{ とする場合には} \\ \\ W = \begin{bmatrix} & & 1 & & \dots \\ & & & 1 & \dots \\ 1 & & & & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ & & & & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad ((4,4) \text{ 成分から } (p,p) \text{ 成分までは対角線に } 1 \text{ が並び, これら以外は } 0.) \\ \\ \text{として, 上記の式を } WAW^{-1} \cdot W\mathbf{x} = rW\mathbf{x} \text{ と読み替へればよい. (ここで } W\mathbf{x} = {}^t(x_2, x_3, x_1, x_4, \dots, x_p) \text{ となる} \\ \text{ことに注意.)} \end{array} \right)$$

まづ, 教科書の様にして

$$\sum_{i=1}^p a_{1i}(x_i - x_1) = 0$$

を得るが, $a_{1i} \geq 0$ で $x_i - x_1 \leq 0$ なので, $x_i \neq x_1$ なる i については $a_{1i} = 0$ である. いま $x_1 = x_2 = \dots = x_n > x_{n+1}$ であるとすると, このことは v_1 は v_{n+1}, \dots, v_p とは繋つてゐないことを意味する. 同様に

$$\sum_{i=1}^p a_{2i}(x_i - x_2) = 0$$

が得られるが $x_i - x_2 \leq 0$ から v_2 も v_{n+1}, \dots, v_p とは繋つてゐない. 以下, 同様にして, v_1, \dots, v_n は v_{n+1}, \dots, v_p とは繋つてゐない. これは G が連結であることに反する. つまり $x_1 = x_2 = \dots = x_p$ である. よつて \mathbf{x} は ${}^t(1, 1, \dots, 1)$ の定数倍であり, 固有値 r に対応する固有空間の次元は 1, 即ち $m(r) = 1$ である.