実施：2020 年 1 月 23 日 (木) 9:10-10:40, 4-406 室

2019 年度　**後期　定期試験**　(問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評　点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
2	有	なし	80 分	線形代数 2　木曜 1 時限, 教科書：Original　(§§ 5.1 – 7.1)	A, B	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9 桁)	氏　名
なし	理工学部	数学科	年		

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする.

$\boxed{1}$ (15 点)　拡大係数行列の簡約化で連立 1 次方程式を解け:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & 1 & 11 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & -6 & 2 & -6 \\ 4 & 8 & -7 & -2 & 5 & 8 \\ 5 & 10 & -3 & 9 & 8 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -6 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

◎ 検算を！　(解を代入して成り立つか.)

$\boxed{2}$ (10 点)　$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -3 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$ の逆行列を<u>簡約化</u>で求めよ.

◎ 検算を！　(掛けて I になるかどうか.)

$\boxed{3}$ (10 点)　$A^7 = O$ のとき, $I - A$ が正則であることを, これの逆行列を実際に与へることで示せ. (Hint : $1 - x^7$ の因数分解)

$\boxed{4}$ (10 点)　Vector 空間 $\mathbb{R}^3$ の次の部分集合

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 \ \ - x_2 + 3x_3 \leqq 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leqq 2 \end{matrix} \right\}$$

が部分空間でないことを示せ.

学 籍 番 号 (9 桁)	氏　　名

学 籍 番 号 (9 桁)	氏　　名

$\boxed{\mathbf{5}}$ (15 点) V が vector 空間で, W_1 と W_2 が V の部分空間であるとする. このとき, $W_1 \cup W_2$ が V の部分空間であるならば, $W_1 \subset W_2$ または $W_1 \supset W_2$ であることを示せ.

(Hint : 背理法. $W_1 \subset W_2$ でも $W_1 \supset W_2$ でもないとすれば, $\boldsymbol{v}_1 \in W_1$ かつ $\boldsymbol{v}_1 \not\in W_2$ なる $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2 \not\in W_1$ かつ $\boldsymbol{v}_2 \in W_2$ なる $\boldsymbol{v}_2$ とが存在する. このとき, $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in W_1 \cup W_2$ であるから, $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{w}_1$ ($\exists\, \boldsymbol{w}_1 \in W_1$) または $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{w}_2$ ($\exists\, \boldsymbol{w}_2 \in W_2$) である.)

$\boxed{\mathbf{6}}$ (20 点) 次に挙げる V 内の vectors の組に対して次の問に答へよ.
(i) 1 次独立な最大個数 r を求めよ.
(ii) r 個の 1 次独立な vectors を前の方から順に求めよ.
(iii) 他の vectors を (ii) の vectors の 1 次結合で書き表せ.

(1) $V = \mathbb{R}^5$,

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 11 \\ -6 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_6 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

(2) $V = \mathbb{R}[x]_4$,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 + 3x - 2x^2 + 4x^3 + 5x^4, & f_2(x) &= 2 + 6x - 4x^2 + 8x^3 + 10x^4, \\ f_3(x) &= -2 + x \phantom{{}- 2x^2} - 7x^3 - 3x^4, & f_4(x) &= -1 + 11x - 6x^2 - 2x^3 + 9x^4, \\ f_5(x) &= 4 - x + 2x^2 + 5x^3 + 8x^4, & f_6(x) &= -3 + 3x - 6x^2 + 8x^3 - 5x^4. \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (10 点) 次の写像は線形写像か. 理由を付けて答へよ.

(1) $T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 - 2x_2 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

(2) $T(f(x)) = (x+1)f'(x) + f(x) + x : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ (10 点) 次の線形写像 T について, 次の (i), (ii) のそれぞれを求めよ.
(i) $\mathrm{Ker}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{null}(T)$.
(ii) $\mathrm{Im}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{rank}(T)$.

$$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^5.\ \ 但し\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & 1 & 11 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & -6 & 2 & -6 \\ 4 & 8 & -7 & -2 & 5 & 8 \\ 5 & 10 & -3 & 9 & 8 & -5 \end{bmatrix}.$$

学 籍 番 号 (9 桁)	氏 名

記　号
$\mathbb{R}$ … 実数全体のなす体, $\mathbf{K}$ … 任意に与へられた体.

以下では常に, U や V は体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とする.

既習事項のまとめ

(1) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ について $[A\,|\,\boldsymbol{b}]$ をこの連立 1 次方程式の拡大係数行列とよぶ.

(2) **簡約化による連立 1 次方程式の解法**. 与へられた連立 1 次方程式に対し, その拡大係数行列に対して,
(i) ある行に 0 ではない定数を掛ける;
(ii) 2 つの行を入れ替へる;
(iii) ある行textbf に別の行の定数倍を加へる,
の操作（1 回にどれか 1 つ）を何回か行なつて簡約化すれば, いかなる連立 1 次方程式をも解くことができる.

(3) 集合 V と体 $\mathbf{K}$ について, 和と scalar 倍と呼ばれる演算 $V\times V\to V$, $\mathbf{K}\times V\to V$ が定義されてゐて, 和に関して群をなし, 和と scalar 倍について分配法則が成り立ち, さらに, ごく自然な付加的性質が成り立つとき, V は $\mathbf{K}$ 上の vector 空間と呼ばれる.

(4) Vector 空間 V の和に関する単位元を零 vector と呼んで $\mathbf{0}$ で表す.

(5) Vector 空間 V の部分集合 W は,
S1. $\mathbf{0}\in W$,
S2. $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in W$ ならば $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\in W$,
S3. $c\in\mathbf{K}$, $\boldsymbol{u}\in W$ ならば $c\boldsymbol{u}\in W$
の 3 つがすべて成り立つとき, V の部分空間と呼ばれる.

(6) $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m\in V$ と $c_1,\cdots,c_n\in\mathbf{K}$ について, $c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{u}_n$ の形の式を $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合といひ, $c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{u}_n=\mathbf{0}$ なる式が成り立つとき, これを $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m$ の 1 次関係といふ.

(7) $0\boldsymbol{u}_1+0\boldsymbol{v}_2+\cdots+0\boldsymbol{u}_n=\mathbf{0}$ はいつでも正しい. これを自明な 1 次関係といふ.

(8) $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m\in V$ が自明でない 1 次関係しか満たさないとき, これらは 1 次独立であるといはれる.
l また, 自明でない 1 次関係を満たすとき, これらは 1 次従属であるといはれる.

(9) V の空でない部分集合 S が与へられたとせよ. S から選んだ vectors の組が 1 次独立で, それ以外のいかなる S vector を付け加へても 1 次従属になるとき, その組を S の最大 1 次独立な組と称し, その組を構成する vectors の個数を S の最大 1 次独立数とよぶ.

(10) **（命題 6.4.9）** $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m\in V$ を 1 次独立な vectors とし,

$$(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n)=(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m)A$$

と書けてゐるとし, $A=[\,\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n\,]$ とする.
このとき, $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ には同じ 1 次関係が成り立つ.

(11) $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\in V$ の 1 次結合の全体は V の部分空間をなす.
それを, これらの vectors で生成される部分空間と呼び, $\langle\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\rangle$ や $\mathbf{K}\boldsymbol{u}_1+\cdots+\mathbf{K}\boldsymbol{u}_n$ で表す.

(12) **（系 6.5.11）** Vector 空間 V に属する vectors の組 $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ の最大 1 次独立数を与へる組は, 部分空間 $\langle\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\rangle$ の基をなす.

(13) 写像 $T:U\to V$ が, 任意の $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\in U$, $c\in\mathbf{K}$ について
L1. $T(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2)=T(\boldsymbol{u}_1)+T(\boldsymbol{u}_2)$,
L2. $T(c\boldsymbol{u}_1)=cT(\boldsymbol{u}_1)$
をともに満たすとき, T は線形写像といはれる. 線形写像は零 vector を零 vector に写す.

(14) T を vector 空間 U から同 V への線形写像とする. このとき

$$\mathrm{Ker}(T)=\{\boldsymbol{u}\in U\,|\,T(\boldsymbol{u})=\mathbf{0}_V\},\quad \mathrm{Im}(T)=\{T(\boldsymbol{u})\,|\,\boldsymbol{u}\in U\}$$

とおく. これらはそれぞれ U, V の部分空間であり, $\mathrm{Ker}(T)$ を T の核, $\mathrm{Im}(T)$ を T の像と呼ぶ.
さらに $\mathrm{rank}(T)=\dim(\mathrm{Im}(T))$, $\mathrm{null}(T)=\dim(\mathrm{Ker}(T))$ と定め, それぞれ T の階数, 退化次数といふ.

(15) 例へば $A\in\mathrm{Mat}(m,n,\mathbf{R})$ で, $T:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $T(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ のときは

$$\mathrm{Ker}(T)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m\,|\,A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\},\quad（\text{連立 1 次方程式 } A\boldsymbol{x}=\mathbf{0} \text{ の解空間}）$$

$$\mathrm{Im}(T)=\{A\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\},\quad（\text{空間 } \mathbb{R}\boldsymbol{a}_1+\mathbb{R}\boldsymbol{a}_2+\cdots+\mathbb{R}\boldsymbol{a}_n）$$

である.