実施：2019 年 12 月 26 日 (木) 9:10-10:40, 4-406 室

2019 年度 **後期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
2	有	なし	80 分	線形代数 2 木曜 1 時限, 教科書：Original (§§ 5.1 – 7.1)	A, B	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	数学科	年		

評点

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.

$\boxed{1}$ (15 点) 拡大係数行列の簡約化で連立 1 次方程式を解け:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 & 5 & -5 \\ 3 & 0 & 6 & 9 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & -7 & -1 & -5 & 4 & -8 \\ 5 & -3 & 7 & 9 & 8 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ 8 \\ -9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

◎ 検算を！ (解を代入して成り立つか.)

$\boxed{2}$ (10 点) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ の逆行列を簡約化で求めよ.

◎ 検算を！ (掛けて I になるかどうか.)

$\boxed{3}$ (10 点) $A^5 = O$ のとき, $I - A$ が正則であることを, これの逆行列を実際に与えることで示せ. (Hint : $1 - x^5$ の因数分解)

$\boxed{4}$ (10 点) Vector 空間 $\mathbb{R}^3$ の次の部分集合

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 \ \ - x_2 + 3x_3 \geqq 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geqq 2 \end{array} \right\}$$

が部分空間でないことを示せ.

学 籍 番 号 (9 桁)	氏 名

学 籍 番 号 (9 桁)	氏　　名

$\boxed{5}$ (15 点) V が vector 空間で, W_1 と W_2 が V の部分空間であるとする. このとき, $W_1 \cup W_2$ が V の部分空間であるならば, $W_1 \subset W_2$ または $W_1 \supset W_2$ であることを示せ.

(Hint : 任意の $\boldsymbol{v}_1 \in W_1$ と任意の $\boldsymbol{v}_2 \in W_2$ について $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in W_1 \cup W_2$ ゆゑ $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{w}_1$ ($\exists \boldsymbol{w}_1 \in W_1$) または $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{w}_2$ ($\exists \boldsymbol{w}_2 \in W_2$) である.)

$\boxed{6}$ (20 点) 次に挙げる V 内の vectors の組に対して次の問に答へよ.
(i) 1 次独立な最大個数 r を求めよ.
(ii) r 個の 1 次独立な vectors を前の方から順に求めよ.
(iii) 他の vectors を (ii) の vectors の 1 次結合で書き表せ.

(1) $V = \mathbb{R}^5$,

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 5 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_6 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \\ -8 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

(2) $V = \mathbb{R}[x]_4$,

$f_1(x) = 2 + 3x - x^2 + 3x^3 + 5x^4$, $\quad f_2(x) = -2 + \quad 4x^2 - 7x^3 - 3x^4$,

$f_3(x) = 2 + 6x + 2x^2 - x^3 + 7x^4$, $\quad f_4(x) = 2 + 9x + 5x^2 - 5x^3 + 9x^4$,

$f_5(x) = 5 - x + 2x^2 + 4x^3 + 8x^4$, $\quad f_6(x) = -5 + 4x + x^2 - 8x^3 - 6x^4$.

$\boxed{7}$ (10 点) 次の写像は線形写像か. 理由を付けて答へよ.

(1) $T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 - 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

(2) $T(f(x)) = f''(x)x^2 + (x+1)f'(x) + f(x) : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$.

$\boxed{8}$ (10 点) 次の線形写像 T について, 次の (i), (ii) のそれぞれを求めよ.
(i) $\mathrm{Ker}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{null}(T)$.
(ii) $\mathrm{Im}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{rank}(T)$.

$$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^5. \quad 但し\ A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 & 5 & -5 \\ 3 & 0 & 6 & 9 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & -7 & -1 & -5 & 4 & -8 \\ 5 & -3 & 7 & 9 & 8 & -6 \end{bmatrix}.$$

学 籍 番 号 (9 桁)	氏　　名

記　号

$\mathbb{R}$ ⋯ 実数全体のなす体,　$\mathbf{K}$ ⋯ 任意に与へられた体.

以下では常に, U や V は体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とする.

既習事項のまとめ

(1) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ について $[A\,|\,\boldsymbol{b}]$ をこの連立 1 次方程式の拡大係数行列とよぶ.

(2) **簡約化による連立 1 次方程式の解法**.　与へられた連立 1 次方程式に対し, その拡大係数行列に対して,
(i) ある行に 0 ではない定数を掛ける;
(ii) 2 つの行を入れ替へる;
(iii) ある行textbf に別の行の定数倍を加へる,
の操作（1 回にどれか 1 つ）を何回か行なつて簡約化すれば, いかなる連立 1 次方程式をも解くことができる.

(3) 集合 V と体 $\mathbf{K}$ について, 和と scalar 倍と呼ばれる演算 $V \times V \to V$, $\mathbf{K} \times V \to V$ が定義されてゐて, 和に関して群をなし, 和と scalar 倍について分配法則が成り立ち, さらに, ごく自然な付加的性質が成り立つとき, V は $\mathbf{K}$ 上の vector 空間と呼ばれる.

(4) Vector 空間 V の和に関する単位元を零 vector と呼んで $\mathbf{0}$ で表す.

(5) Vector 空間 V の部分集合 W は,
S1. $\mathbf{0} \in W$,
S2. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$ ならば $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$,
S3. $c \in \mathbf{K}$, $\boldsymbol{u} \in W$ ならば $c\boldsymbol{u} \in W$
の 3 つがすべて成り立つとき, V の部分空間と呼ばれる.

(6) $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m \in V$ と $c_1, \cdots, c_n \in \mathbf{K}$ について, $c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n$ の形の式を $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合といひ, $c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \mathbf{0}$ なる式が成り立つとき, これを $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次関係といふ.

(7) $0\boldsymbol{u}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{u}_n = \mathbf{0}$ はいつでも正しい. これを自明な 1 次関係といふ.

(8) $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m \in V$ が自明でない 1 次関係しか満たさないとき, これらは 1 次独立であるといはれる.
l また, 自明でない 1 次関係を満たすとき, これらは 1 次従属であるといはれる.

(9) V の空でない部分集合 S が与へられたとせよ. S から選んだ vectors の組が 1 次独立で, それ以外のいかなる S vector を付け加へても 1 次従属になるとき, その組を S の最大 1 次独立な組と称し, その組を構成する vectors の個数を S の最大 1 次独立数とよぶ.

(10) **（命題 6.4.9）**　$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m \in V$ を 1 次独立な vectors とし,
$$(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)A$$
と書けてゐるとし, $A = [\,\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n\,]$ とする.
このとき, $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ には同じ 1 次関係が成り立つ.

(11) $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \in V$ の 1 次結合の全体は V の部分空間をなす.
それを, これらの vectors で生成される部分空間と呼び, $\langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ や $\mathbf{K}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \mathbf{K}\boldsymbol{u}_n$ で表す.

(12) **（系 6.5.11）**　Vector 空間 V に属する vectors の組 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ の最大 1 次独立数を与へる組は, 部分空間 $\langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ の基をなす.

(13) 写像 $T : U \to V$ が, 任意の $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$, $c \in \mathbf{K}$ について
L1. $T(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = T(\boldsymbol{u}_1) + T(\boldsymbol{u}_2)$,
L2. $T(c\boldsymbol{u}_1) = cT(\boldsymbol{u}_1)$
をともに満たすとき, T は線形写像といはれる. 線形写像は零 vector を零 vector に写す.

(14) T を vector 空間 U から同 V への線形写像とする. このとき
$$\mathrm{Ker}(T) = \{\boldsymbol{u} \in U \,|\, T(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_V\}, \quad \mathrm{Im}(T) = \{T(\boldsymbol{u}) \,|\, \boldsymbol{u} \in U\}$$
とおく. これらはそれぞれ U, V の部分空間であり, $\mathrm{Ker}(T)$ を T の核, $\mathrm{Im}(T)$ を T の像と呼ぶ.
さらに $\mathrm{rank}(T) = \dim(\mathrm{Im}(T))$,　$\mathrm{null}(T) = \dim(\mathrm{Ker}(T))$ と定め, それぞれ T の階数, 退化次数といふ.

(15) 例へば $A \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbf{R})$ で, $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ のときは
$$\mathrm{Ker}(T) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \,|\, A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}, \quad \text{（ 連立 1 次方程式 } A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \text{ の解空間 ）}$$
$$\mathrm{Im}(T) = \{A\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}, \quad \text{（ 空間 } \mathbb{R}\boldsymbol{a}_1 + \mathbb{R}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mathbb{R}\boldsymbol{a}_n \text{ ）}$$
である.