実施：2021 年 1 月 21 日 (木) 9:10-10:40, H-203 室

開講学部	評点小計
理工学部	

2020 年度　**後期　定期試験**　(問題 兼 解答用紙)

評　点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
2	有	なし	80 分	線形代数 2　木曜 1 時限, 教科書：Original　(§§5.1 – 7.1)	A, B	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	数学科	年		

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと．最終結果だけでは得点できない．
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと．
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする．

$\boxed{1}$ (15 点) 以下の A, $\boldsymbol{b}$ に対し, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解け．

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & -3 & 1 & -3 & 6 \\ -1 & -3 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 9 & -7 & -1 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{2}$ (10 点) 次はそれぞれ $\mathbb{R}^3$ の部分空間であるか．理由をつけて答へよ．

(1) $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} 3x_1 + x_2 = 5x_3, \\ x_1 - 4x_2 = x_3 \end{array} \right\}.$

(2) $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} 2{x_1}^2 - 3{x_2}^2 + {x_3}^2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{array} \right\}.$

$\boxed{3}$ (10 点) 次はそれぞれ $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間であるか. 理由をつけて答へよ.
但し $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数, $o(x) = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$ である.
(1) $W = \{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f'(1) \leq 3 \,\}$.
(2) $W = \{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid (x-1)f'(x) + f(x) = o(x) \,\}$.

学 籍 番 号 (9 桁)	氏　　名

$\boxed{4}$ (10 点) Vector 空間 V において 1 次関係

$$\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3, \qquad \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + 4\boldsymbol{u}_3,$$
$$\boldsymbol{v}_3 = 3\boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3, \qquad \boldsymbol{v}_4 = -\boldsymbol{u}_1 \quad + 6\,\boldsymbol{u}_3$$

があるとき, **既習事項のまとめ** (12) により $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$ は 1 次従属である. これらの間に必ず成り立つ非自明な 1 次関係を 1 つ挙げよ.

学 籍 番 号 (9 桁)	氏　　名

$\boxed{\mathbf{5}}$ (10 点) 次の $\mathbb{R}^4$ の元の組の 1 次独立な最大の組を求めよ：

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}-2\\3\\-1\\3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}-6\\9\\-3\\9\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}3\\-3\\2\\-7\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_4=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\-1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_5=\begin{bmatrix}1\\-3\\0\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_6=\begin{bmatrix}-1\\6\\3\\8\end{bmatrix}.$$

但し, 番号の小さいものを優先させよ. さらに, それ以外の vectors をそれらの 1 次結合で表せ. （$\boxed{\mathbf{1}}$ の計算を利用してよい. ）

$\boxed{\mathbf{6}}$ (10 点) 次の $\mathbb{R}[x]_3$ の元の組の 1 次独立な最大の組を求めよ：

$$\begin{aligned}
&f_1(x)=-2+3x-x^2+3x^3, && f_2(x)=-6+9x-3x^2+9x^3,\\
&f_3(x)=3-3x+2x^2-7x^3, && f_4(x)=1+x+2x^2-x^3,\\
&f_5(x)=1-3x+x^3, && f_6(x)=-1+6x+3x^2+8x^3.
\end{aligned}$$

但し, 番号の小さいものを優先させよ. さらに, それ以外の vectors をそれらの 1 次結合で表せ. （$\boxed{\mathbf{1}}$ の計算を利用してよい. ）

$\boxed{\mathbf{7}}$ (10 点) V を $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とせよ. W_1 と W_2 が V の部分空間であるとき, $W_1\cup W_2$ が V の部分空間であるならば, $W_1\subset W_2$ または $W_1\supset W_2$ であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{8}}$ (15 点) $\boxed{\mathbf{1}}$ の係数行列 A について, 次を求めよ.

(1) $\mathbb{R}^4$ の部分空間 $\{\, A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^6 \,\}$ の 1 組の基と次元を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^6$ の部分空間 $\{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^6 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\}$ の 1 組の基と次元を求めよ.

学 籍 番 号 (9 桁)	氏　　名

$\boxed{\mathbf{9}}$ (10 点) $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間

$$\{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(-1) = 0,\ f''(2) = 0 \,\}$$

の 1 組の基と次元を求めよ. 但し, $f''(x)$ は $f(x)$ の 2 次導関数である.

記　号　　$\mathbb{R}$ … 実数全体のなす体, $\mathbf{K}$ … 任意に与へられた体.

以下では常に, U や V は体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とする.

既習事項のまとめ

（1）行列の主成分とは, 各行における 0 でない最も左にある成分のことである. 従つて主成分が存在しない行もあり得る.

（2）簡約行列とは“右下りの優しい階段状”の行列であつて, 主成分がすべて 1 で, 主成分のある列は主成分以外はすべて 0 である様なもののこと.

（3）どんな行列も基本変形（掃き出し法）により簡約行列に変形（簡約化）でき, 結果は一意的である. それにより, 連立 1 次方程式を解くことができる.

（4）連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ について $[A\,|\,\boldsymbol{b}]$ をこの連立 1 次方程式の拡大係数行列とよぶ.

（5）**簡約化による連立 1 次方程式の解法**.　連立 1 次方程式の拡大係数行列に対して,
(i) ある行に 0 ではない定数を掛ける;
(ii) 2 つの行を入れ替へる;
(iii) ある行**に**別の行の定数倍を加へる,
の操作（1 回にどれか 1 つ）を何回か行なつて簡約化すれば, いかなる連立 1 次方程式をも解くことができる.

（6）集合 V と体 $\mathbf{K}$ について, 和と scalar 倍と呼ばれる演算 $V \times V \to V$, $\mathbf{K} \times V \to V$ が定義されてゐて, 和に関して群をなし, 和と scalar 倍について分配法則が成り立ち, さらに,“ごく自然な演算規則群”が成り立つとき, V は $\mathbf{K}$ 上の vector 空間と呼ばれる.

（7）Vector 空間 V の和に関する単位元を零 vector と呼んで $\mathbf{0}$ で表す.

（8）Vector 空間 V の部分集合 W は,
S1. $\mathbf{0} \in W$,
S2. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$ ならば $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$,
S3. $c \in \mathbf{K}$, $\boldsymbol{u} \in W$ ならば $c\boldsymbol{u} \in W$
の 3 つがすべて成り立つとき, V の部分空間と呼ばれる.

（9）$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m \in V$ と $c_1, \cdots, c_n \in \mathbf{K}$ について, $c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n$ の形の式を $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合といひ, $c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \mathbf{0}$ なる式が成り立つとき, これを $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次関係といふ.

(10) $0\boldsymbol{u}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{u}_n = \mathbf{0}$ はいつでも正しい. これを自明な 1 次関係といふ.

(11) $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m \in V$ が自明でない 1 次関係しか満たさないとき, これらは 1 次独立であるといはれる.
また, 自明でない 1 次関係を満たすとき, これらは 1 次従属であるといはれる.

(12) **（補題 6.3.8）**　V の vectors の 2 つの組 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ について,
① $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ のどれもが $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で書けて,
② $n > m$ であるならば, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次従属である.

(13) **（系 6.3.9）**　V の vectors の 2 つの組 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ について,
① $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ のどれもが $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で書けて,
② $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立, であるならば $n \leq m$ である.

(14) V の空でない部分集合 S が与へられたとせよ. S から選んだ vectors の組が 1 次独立で, それ以外のいかなる S vector を付け加へても 1 次従属になるとき, その組を S の最大 1 次独立な組と称し, その組を構成する vectors の個数を S の最大 1 次独立数とよぶ.

(15) **（命題 6.4.9）**　$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m \in V$ を 1 次独立な vectors とし,
$$(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)A$$
と書けてゐるとし, $A = [\,\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n\,]$ とする.
このとき, $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ には同じ 1 次関係が成り立つ.

(16) $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \in V$ の 1 次結合の全体は V の部分空間をなす.
それを, これらの vectors で生成される部分空間と呼び, $\langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ や $\mathbf{K}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \mathbf{K}\boldsymbol{u}_n$ で表す.

(17) **（系 6.5.11）**　Vector 空間 V に属する vectors の組 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ の最大 1 次独立数を与へる組は, 部分空間 $\langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ の基をなす.