

2020年度 前期中間試験 (問題兼解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名		出題者
1/7	有	なし	90分	線形代数2 <small>木曜1時限, 教科書: Original</small>		大西良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

- 注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと。最終結果だけでは得点できない。
 注意 2. 教科書はもちろん、本問題用紙以外のものを見てはいけない。
 注意 3. 裏面は使用してはならない。各問題用紙の表面に収まる様に答案を作成せよ。
 注意 4. あなた 1 人だけの静寂な環境で解答を作成すること。
 注意 5. その他、“Class room” に記した注意を守ること。

1 (15点) 次の連立1次方程式を解け：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 1 & -1 & 4 \\ -3 & -2 & 7 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & -3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

2020年度 前期中間試験 (問題兼解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名			出題者
2/7	有	なし	90分	線形代数2 <small>木曜1時限, 教科書: Original</small>			大西良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9桁)	氏名	
なし	理工学部	学科	年				

2 (20点) 次はそれぞれ \mathbb{R}^3 の部分空間であるか. 理由をつけて答へよ.

(1) $W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 = 5x_3, \\ x_1 + 4x_2 = x_3 \end{array} \right\}$.

(2) $W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\}$.

2020年度 前期中間試験 (問題兼解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名		出題者
3/7	有	なし	90分	線形代数2 <small>木曜1時限, 教科書: Original</small>		大西良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

3 (20点) 次はそれぞれ $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間であるか. 理由をつけて答へよ.

但し $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数, $o(x) = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$ である.

(1) $W = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f'(1) \leq 2\}$.

(2) $W = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid (x-2)f'(x) - f(x) = o(x)\}$.

2020年度 前期中間試験 (問題兼解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名		出題者
4/7	有	なし	90分	線形代数2 <small>木曜1時限, 教科書: Original</small>		大西良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

4 (15点) Vector 空間 V において 1 次関係

$$v_1 = 3u_1 + u_2 - 5u_3, \quad v_2 = 2u_1 + 3u_2 - 2u_3, \quad v_3 = u_1 - 2u_2 - u_3, \quad v_4 = -u_1 + 2u_2 - 3u_3$$

があるとき, **既習事項のまとめ** (12) により v_1, v_2, v_3, v_4 は 1 次従属である. これらの間に必ず成り立つ非自明な 1 次関係を 1 つ挙げよ.

2020年度 前期中間試験 (問題兼解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名			出題者
5/7	有	なし	90分	線形代数2 <small>木曜1時限, 教科書: Original</small>			大西良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9桁)		氏名
なし	理工学部	学科	年				

5 (15点) 次の \mathbb{R}^4 の元の組の1次独立な最大の組を求めよ:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_6 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

但し, 番号の小さいものを優先させよ. さらに, それ以外の vectors をそれらの1次結合で表せ.

(1 の計算を利用してよい.)

実施：2020年12月17日(木) 14:50-16:20, 場所 自宅等

2020年度 前期中間試験 (問題兼解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名		出題者
6/7	有	なし	90分	線形代数2 <small>木曜1時限, 教科書: Original</small>		大西良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

6 (15点) V を \mathbf{K} 上の vector 空間とせよ. W_1 と W_2 が V の部分空間であるとき, $W_1 \cup W_2$ が V の部分空間であるならば, $W_1 \subset W_2$ または $W_1 \supset W_2$ であることを示せ.

記号

\mathbb{N} … 自然数全体,
 \mathbb{Z} … 整数全体のなす環,
 \mathbb{Q} … 有理数全体のなす体,
 \mathbb{R} … 実数全体のなす体,
 \mathbb{C} … 複素数全体のなす体,
 \mathbf{K} … 一般の体,
 I … 単位行列,
 $\text{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ … $m \times n$ 行列,
 $\text{Mat}(n, \mathbf{K})$ … n 次正方行列,
 $\text{GL}(n, \mathbf{K})$ … n 次正則行列.

既習事項のまとめ

- 行列の主成分とは、各行における 0 でない最も左にある成分のことである。従って主成分が存在しない行もあり得る。
- 簡約行列とは“右下りの優しい階段状”の行列であつて、主成分がすべて 1 で、主成分のある列は主成分以外はすべて 0 である様なもののこと。
- どんな行列も基本変形（掃き出し法）により簡約行列に変形（簡約化）でき、結果は一意的である。それにより、連立 1 次方程式を解くことができる。
- 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ について $[A|\mathbf{b}]$ をこの連立 1 次方程式の拡大係数行列とよぶ。
- 簡約化による連立 1 次方程式の解法。連立 1 次方程式の拡大係数行列に対して、
 - ある行に 0 ではない定数を掛ける；
 - 2 つの行を入れ替へる；
 - ある行に別の行の定数倍を加へる、の操作（1 回にどれか 1 つ）を何回か行なつて簡約化すれば、いかなる連立 1 次方程式をも解くことができる。
- 集合 V と体 \mathbf{K} について、和と scalar 倍と呼ばれる演算 $V \times V \rightarrow V$, $\mathbf{K} \times V \rightarrow V$ が定義されてみて、和に関して群をなし、和と scalar 倍について分配法則が成り立ち、さらに、“ごく自然な演算規則群”が成り立つとき、 V は \mathbf{K} 上のvector 空間と呼ばれる。
- Vector 空間 V の和に関する単位元を零 vectorと呼んで $\mathbf{0}$ で表す。
- Vector 空間 V の部分集合 W は、
 - $\mathbf{0} \in W$,
 - $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ ならば $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$,
 - $c \in \mathbf{K}, \mathbf{u} \in W$ ならば $c\mathbf{u} \in W$
 の 3 つがすべて成り立つとき、 W の部分空間と呼ばれる。
- $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \in V$ と $c_1, \dots, c_n \in \mathbf{K}$ について、 $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \dots + c_n\mathbf{u}_n$ の形の式を $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ の1 次結合といひ、 $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \dots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$ なる式が成り立つとき、これを $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ の1 次関係といふ。
- $0\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + \dots + 0\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$ はいつでも正しい。これを自明な 1 次関係といふ。
- $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \in V$ が自明でない 1 次関係しか満たさないとき、これらは1 次独立であるといはれる。
また、自明でない 1 次関係を満たすとき、これらは1 次従属であるといはれる。
- (補題 6.3.8)** V の vectors の 2 つの組 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ について、① $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ のどれもが $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$ の 1 次結合で書いて、② $n > m$ であるならば、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ は 1 次従属である。
- (系 6.3.9)** V の vectors の 2 つの組 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ について、① $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ のどれもが $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$ の 1 次結合で書いて、② $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ が 1 次独立、であるならば $n \leq m$ である。

- V の空でない部分集合 S が与へられたとせよ。 S から選んだ vectors の組が 1 次独立で、それ以外のいかなる S vector を付け加へても 1 次従属になるとき、その組を S の最大 1 次独立な組と称し、その組を構成する vectors の個数を S の最大 1 次独立数とよぶ。

- (命題 6.4.9)** $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \in V$ を 1 次独立な vectors とし、

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)A$$

と書いてみるとし、 $A = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n]$ とする。

このとき、 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ と $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ には同じ 1 次関係が成り立つ。

- $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ の 1 次結合の全体は V の部分空間をなす。それを、これらの vectors で生成される部分空間と呼び、 $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$ や $\mathbf{K}\mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{K}\mathbf{u}_n$ で表す。
- (系 6.5.11)** Vector 空間 V に属する vectors の組 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ の最大 1 次独立数を与へる組は、部分空間 $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$ の基をなす。
- 写像 $T: U \rightarrow V$ が、任意の $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U, c \in \mathbf{K}$ について
 - $T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2)$,
 - $T(c\mathbf{u}_1) = cT(\mathbf{u}_1)$
 をともに満たすとき、 T は線形写像といはれる。線形写像は零 vector を零 vector に写す。
- T を vector 空間 U から同 V への線形写像とする。このとき

$$\text{Ker}(T) = \{\mathbf{u} \in U \mid T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_V\},$$

$$\text{Im}(T) = \{T(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in U\}$$

とおく。これらはそれぞれ U, V の部分空間であり、 $\text{Ker}(T)$ を T の核、 $\text{Im}(T)$ を T の像と呼ぶ。さらに

$$\text{rank}(T) = \dim(\text{Im}(T)),$$

$$\text{null}(T) = \dim(\text{Ker}(T))$$

と定め、それぞれ T の階数、退化次数といふ。

- 例へば $A \in \text{Mat}(m, n, \mathbf{R})$ で、 $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ のときは

$$\text{Ker}(T) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\},$$

(連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間)

$$\text{Im}(T) = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\},$$

(空間 $\mathbb{R}\mathbf{a}_1 + \mathbb{R}\mathbf{a}_2 + \dots + \mathbb{R}\mathbf{a}_n$)

である。

- \mathbf{K} 上の vector 空間 U から \mathbf{K} 上の vector 空間 V への写像 T は、任意の $a, b \in \mathbf{K}$ と任意の $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ に対し $T(a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2) = aT(\mathbf{u}_1) + bT(\mathbf{u}_2)$ を満たすとき線形写像と呼ばれる。
- Vector 空間 V からそれ自身への線形写像を線形変換といふ。
- \mathbf{K} 上の vector 空間 U の基 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ と vector 空間 V の基 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ 、および線形写像 $T: U \rightarrow V$ が与へられたとき、

$$(T(\mathbf{u}_1), \dots, T(\mathbf{u}_n)) = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)A$$

なる $A \in \text{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ を T のこれらの基に関する表現行列と呼ぶ。