実施：2018 年 7 月 31 日 (火) 10:50-12:20, H-301 室

2018 年度　**前期　定期試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評　点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
1/2	有	なし	80 分	線 形 代 数 3　水曜 4 時限, 教科書：Original	大 西 良 博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏　名
なし	理工学部	学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.

注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.

注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする.

注意 4. **6a** と **6b** は選択問題である. どちらか 1 問選んで解答せよ.

1 (15 点) 線形写像 $T:\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, $T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & -3 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & -4 & 5 & -5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$ について, 次を求めよ.

(1) $\mathrm{Ker}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{null}(T)$,

(2) $\mathrm{Im}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{rank}(T)$.

2 (15 点) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ について次の問に答へよ.

(1) 固有多項式 $\varphi_A(t)$ を求めよ.

(2) $g(t) = t^7 - 4t^4 - 3t$ について $g(A)$ を求めよ.

3 (20 点) (1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ に対し直交行列 P^{-1} を求めて $P^{-1}AP$ を対角行列とせよ.

(2) 方程式 $2x^2 + 4xy - y^2 - 20x - 8y + 32 = 0$ の標準形を求めよ.
但し, 新座標には (X, Y) を使ふこと. また, これが表す xy 平面上の図形の概形を図示せよ.

$\boxed{\textbf{4}}$ (15 点) 実対称行列 $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$ に対し, $B = P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求め, B も記せ.

学籍番号

$\boxed{\textbf{5}}$ (15 点) 方程式 $-2x^2 - 2y^2 - 5z^2 + 8xy + 4yz + 4zx = 3$ で定義される 2 次曲面の標準形を求めよ. 但し, 新座標には (X, Y, Z) を使用せよ, また得られた標準形の表す曲面の概略（座標軸の名称 X, Y, Z を入れること）を図示し, その曲面の名称も記せ.

$\boxed{\textbf{6a}}$ (15 点) T を内積空間 V の線形変換とする. T が直交変換であるためには T がどの vector の長さも変へないこと, 即ち $\|T(\boldsymbol{u})\| = \|\boldsymbol{u}\|$ が全ての $\boldsymbol{u} \in V$ について成り立つことが必要十分であることを示せ. 但し $\|\boldsymbol{u}\|$ は $\boldsymbol{u}$ の norm を表す.

$\boxed{\textbf{6b}}$ (15 点) A を n 次の実対称行列とせよ. $\mathbb{R}^n$ には標準内積を入れておく. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ を A の固有値 λ, μ に対する固有 vectors とせよ. このとき $\lambda \neq \mu$ ならば $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ であることを示せ.

実施：2018 年 7 月 31 日 (火) 10:50-12:20, H-301 室

2018 年度 **前期 定期試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
2/2	有	なし	80 分	線形代数 3 水曜 4 時限, 教科書：Original	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

$\boxed{7}$ (5 点) 次の問に答へよ.

(1) $M \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ を n 次正則行列とし, その固有値を $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ とする. このとき, M^{-1} の固有値は ${\alpha_1}^{-1}, \cdots, {\alpha_n}^{-1}$ であることを示せ.

(2) 交代行列 $H \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ (つまり ${}^tH = -H$) は -1 を固有値に持たないことを示せ.

(Hint : $\boldsymbol{u}$ と $H\boldsymbol{u}$ との標準内積を利用して $H\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$ ならば $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ となることを示せ.)

(3) 直交行列 $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ について $|A| = -1$ ならば -1 は A の固有値であることを証明せよ.

(Hint : 行列式が -1 であるいくつかの直交行列の固有多項式を挙げておく. $t^3 - \frac{3}{7}t^2 - \frac{3}{7}t + 1$, $t^4 + \frac{4}{9}t^3 - \frac{4}{9}t - 1$, $t^5 - \frac{3}{5}t^4 - \frac{2}{5}t^3 - \frac{2}{5}t^2 - \frac{3}{5}t + 1$.)

(4) H が成分を有理数とする交代行列のとき $f(H) = (I - H)(I + H)^{-1}$ は, -1 を固有値に持たず, しかも成分がすべて有理数である様な直交行列であることを示せ. さらに, f は $\{ H \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{Q}) \mid H$ は交代行列$\}$ から $\{ T \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{Q}) \mid T$ は $|T| = 1$ かつ -1 を固有値に持たない直交行列$\}$ への全単射であることを示し, これの逆の対応を求めよ.

記　号

$\mathbb{N}$ ⋯ 自然数全体, $\mathbb{Z}$ ⋯ 整数全体のなす環, $\mathbb{Q}$ ⋯ 有理数全体のなす体,
$\mathbb{R}$ ⋯ 実数全体のなす体, $\mathbb{C}$ ⋯ 複素数全体のなす体, I ⋯ 単位行列.

既習事項のまとめ

(1) 行列の 主成分 とは, 各行における 0 でない最も左にある成分のことである. 従つて主成分が存在しない行もあり得る.
(2) 簡約行列 とは“右下りの優しい階段状”の行列であつて, 主成分がすべて 1 で, 主成分のある行は主成分以外はすべて 0 であるもののこと.
(3) どんな行列も基本変形（掃き出し法）により簡約行列に変形（簡約化）でき, 結果は一意的である. それにより, 連立 1 次方程式を解くことができる.
(4) Vector 空間 V の部分集合 X について, その中に r 個の vectors からなる 1 次独立な組があり, しかも X のどんな $r{+}1$ 個の vectors も 1 次従属であるとき, r を X の 最大 1 次独立数 と呼ぶ.
(5) Vector 空間 V の最大 1 次独立数を与へる集合 B を V の 基 または 基底 といふ. r を V の 次元 と呼んで $\dim(V)$ または $\dim V$ と記す.
(6) Vector 空間 V からそれ自身への線形写像を 線形変換 といふ.

★ 以下 V は vector 空間, 基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ は V の基, T, T_1, T_2 等は $V \to$ は線形変換であるとする.
★ A, B は n 次正方行列とする.

(7) $\big(T(\boldsymbol{u}_1, \cdots, T(\boldsymbol{u}_n)\big) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\,A$ となる行列 A をこの基に関する T の 表現行列 と呼ぶ.
(8) 線形写像 $T : U \to V$ について
$\mathrm{Ker}(T) = \{\, \boldsymbol{u} \in U \,|\, T(\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}_V \,\}$ を T の 核, $\mathrm{null}(T) = \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$ を T の 退化次数,
$\mathrm{Im}(T) = \{\, T(\boldsymbol{u}) \,|\, \boldsymbol{u} \in U \,\}$ を T の 像, $\mathrm{rank}(T) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$ を T の 階数 といふ.
(9) $\varphi_A(t) = |tI - A|$ を A の固有多項式と称する.
(10) $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ （あるいは $T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$）となる scalar λ と $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ が存在するとき, それぞれを A の（あるいは T の）固有値, 固有値 λ に対する 固有 vector と称する.
(11) $W(\lambda, A) = \{\boldsymbol{u} \,|\, A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}\}$ を λ に対する A の 固有空間 と称する.
(12) $W(\lambda, T) = \{\boldsymbol{u} \,|\, T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}\}$ を λ に対する T の 固有空間 と称する.
(13) λ が A の固有値であるためには $\varphi_A(\lambda) = 0$ であることが必要十分.
(14) Cayley-Hamilton の定理 : $\varphi_A(A) = O$, $\varphi_T(T) = O$.
(15) Vector 空間 V 線形変換 T の V の適当な基に関する表現行列 A に対し $\varphi_T(t) = \varphi_A(t)$ と定め, これを T の固有多項式と呼ぶ. $\varphi_T(t)$ は V の基の選び方に依存しない.
(16) ある正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ となるとき, A と B は 相似 であるといはれる.
(17) 正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき, A は P により 対角化 されるといふ. またこのとき, A は 対角化可能 であるといはれる. T の表現行列 A が対角化可能であるとき, T は 対角化可能 であるといはれる.
(18) A が対角化可能 $\iff \sum_\lambda \dim W(\lambda, A) = n$. 但し, 和は A の固有値 λ のすべてに渡る.
(19) T が対角化可能 $\iff \sum_\lambda \dim W(\lambda, T) = \dim V$. 但し, 和は T の固有値 λ のすべてに渡る.
(20) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}$ が定められてゐて, 第 1 変数についても第 2 変数についても線形性を持ち, さらに任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ について $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$ が成り立ち, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0 \iff \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ を満たすとき, V には内積 (,) が定められてゐるといひ, その様な V を 内積空間 と称する.
(21) 内積空間 V においては $\|\boldsymbol{u}\| = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$ なる記法を用いる. これは $\boldsymbol{u}$ の norm と呼ばれる.
(22) 内積空間において $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ となる vectors $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は直交するといはれ $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ と記される.
(23) 実正方行列 P は ${}^tPP = I$ を満たすとき, 直交行列 と呼ばれる. これは $P\,{}^tP = I$ と同値である.
(24) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対して $(T(\boldsymbol{u}), T(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ となるとき T は 直交変換 であるといはれる.
(25) T が直交変換であることと T の表現行列が直交行列であることは同値.
(26) 実正方行列 P が直交行列であるためには, A の列 vectors の長さが全て 1 でかつ互ひに直交することが必要十分である.
(27) ${}^tA = A$ のとき A は 対称行列 と称される.
(28) どんな対称行列も直交行列により対角化される.
(29) $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ が正則行列のとき $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$ で表はされる 2 次曲線 は平行移動と直交変換により標準形 $Ax^2 + By^2 = 1$ で表される曲線に合同変形される.
(30) $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ が正則な対称行列のとき, $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{23}yz + c = 0$ で表はされる 2 次曲面 は直交変換により標準形 $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ で表される曲面に合同変形される.