実施：2018 年 7 月 4 日 (水) 14:50-16:20, 4-211 室

# 2018 年度 **前期　中間試験** (問題 兼 解答用紙)

| 開講学部 | 評点小計 |
|---|---|
| 理工学部 | |

| 評　点 |
|---|
| |

| 問題枚数 | 両面印刷 | 別紙解答用紙 | 試験時間 | 試験科目名 | 出題者 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1/2 | 有 | なし | 80 分 | 線形代数 3 水曜 4 時限, 教科書：Original | 大西良博 |

| 持込許可物件 | 所属学部 | 所属学科 | 学年 | クラス | 学籍番号 (9 桁) | 氏名 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| なし | 理工学部 | 学科 | 年 | | | |

**注意** 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.

**注意** 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.

**注意** 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする.

**注意** 4. $\boxed{\textbf{3a}}$ と $\boxed{\textbf{3b}}$ は選択問題である. どちらか 1 問選んで解答せよ.

$\boxed{\textbf{1}}$ (15 点) 線形写像 $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, $T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 5 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -5 & 5 & -7 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$ について, 次を求めよ.

(1) $\mathrm{Ker}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{null}(T)$,

(2) $\mathrm{Im}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{rank}(T)$.

$\boxed{\textbf{2}}$ (15 点) $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ について $A^{11} - 95\,A^7 - 200\,I$ を求めよ.

$\boxed{\textbf{3a}}$ (20 点) 方程式 $2x^2 + 72xy + 23y^2 + 60x - 170y - 200 = 0$ の標準形を求め, これが表す $xy$ 平面上の図形の概形を図示せよ.

$\boxed{\textbf{3b}}$ (20 点) $A$ を $n$ 次の実対称行列とせよ. $\mathbb{R}^n$ には標準内積を入れておく. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ を $A$ の固有値 $\lambda$, $\mu$ に対する固有 vectors とせよ. このとき $\lambda \neq \mu$ ならば $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ であることを示せ.

**学籍番号**

$\boxed{\textbf{4}}$ (20 点) 実対称行列 $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -2 & 3 & 4 \\ 6 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ に対し, $B = P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 $P$ を求め, $B$ も記せ.

$\boxed{\textbf{5}}$ (15 点) 方程式 $-2x^2 + 3y^2 - z^2 - 4xy + 8yz + 12zx = 3$ で定義される 2 次曲面の標準形を求めよ. また得られた標準形の表す曲面の概略（座標軸の名称は入れること）を図示し, その曲面の名称も記せ.

$\boxed{\textbf{6}}$ (10 点) $T$ を内積空間 $V$ の線形変換とする. $T$ が直交変換であるためには $T$ がどの vector の長さも変へないこと, 即ち $\|T(\boldsymbol{u})\| = \|\boldsymbol{u}\|$ が全ての $\boldsymbol{u} \in V$ について成り立つことが必要十分であることを示せ. 但し $\|\boldsymbol{u}\|$ は $\boldsymbol{u}$ の norm を表す.

実施：2018 年 7 月 4 日 (水) 14:50-16:20, 4-211 室

2018 年度 **前 期 中 間 試 験** (問題 兼 解答用紙)

| 開講学部 | 評点小計 |
|---|---|
| 理工学部 | |

| 問題枚数 | 両面印刷 | 別紙解答用紙 | 試験時間 | 試 験 科 目 名 | 出 題 者 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2/2 | 有 | なし | 80 分 | 線 形 代 数 3 水曜 4 時限, 教科書：Original | 大 西 良 博 |

| 持込許可物件 | 所属学部 | 所属学科 | 学年 | クラス | 学 籍 番 号 (9 桁) | 氏 名 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| なし | 理工学部 | 学科 | 年 | | | |

$\boxed{\mathbf{7}}$ (5 点) 次の問に答へよ.

(1) $M \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ を $n$ 次正則行列とし, その固有値を $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ とする. このとき, $M^{-1}$ の固有値は ${\alpha_1}^{-1}, \cdots, {\alpha_n}^{-1}$ であることを示せ.

(2) 交代行列 $H \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ ( つまり ${}^tH = -H$ ) は $-1$ を固有値に持たないことを示せ.

( Hint : $\boldsymbol{u}$ と $H\boldsymbol{u}$ との標準内積を利用して $H\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$ ならば $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ となることを示せ. )

(3) 直交行列 $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ について $|A| = -1$ ならば $-1$ は $A$ の固有値であることを証明せよ.

( Hint : 行列式が $-1$ であるいくつかの直交行列の固有多項式を挙げておく. $t^3 - \frac{3}{7}t^2 - \frac{3}{7}t + 1$, $t^4 + \frac{4}{9}t^3 - \frac{4}{9}t - 1$, $t^5 - \frac{3}{5}t^4 - \frac{2}{5}t^3 - \frac{2}{5}t^2 - \frac{3}{5}t + 1$. )

(4) $H$ が成分を有理数とする交代行列のとき $f(H) = (I - H)(I + H)^{-1}$ は, $-1$ を固有値に持たず, しかも成分がすべて有理数である様な直交行列であることを示せ. さらに, $f$ は $\{H \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{Q}) \,|\, H \text{ は交代行列}\}$ から $\{T \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{Q}) \,|\, T \text{ は } |T| = 1 \text{ かつ } -1 \text{ を固有値に持たない直交行列}\}$ への全単射であることを示し, これの逆の対応を求めよ.

**記　号**

$\mathbb{N}$ ⋯ 自然数全体, $\mathbb{Z}$ ⋯ 整数全体のなす環, $\mathbb{Q}$ ⋯ 有理数全体のなす体,
$\mathbb{R}$ ⋯ 実数全体のなす体, $\mathbb{C}$ ⋯ 複素数全体のなす体, $I$ ⋯ 単位行列.

## 既習事項のまとめ

( 1 ) 行列の 主成分 とは, 各行における 0 でない最も左にある成分のことである. 従つて主成分が存在しない行もあり得る.
( 2 ) 簡約行列 とは "右下りの優しい階段状" の行列であつて, 主成分がすべて 1 で, 主成分のある行は主成分以外はすべて 0 であるもののこと.
( 3 ) どんな行列も基本変形（掃き出し法）により簡約行列に変形（簡約化）でき, 結果は一意的である. それにより, 連立 1 次方程式を解くことができる.
( 4 ) Vector 空間 $V$ の部分集合 $X$ について, その中に $r$ 個の vectors からなる 1 次独立な組があり, しかも $X$ のどんな $r+1$ 個の vectors も 1 次従属であるとき, $r$ を $X$ の 最大 1 次独立数 と呼ぶ.
( 5 ) Vector 空間 $V$ の最大 1 次独立数を与へる集合 $B$ を $V$ の 基 または 基底 といふ. $r$ を $V$ の 次元 と呼んで $\dim(V)$ または $\dim V$ と記す.
( 6 ) Vector 空間 $V$ からそれ自身への線形写像を 線形変換 といふ.

★ 以下 $V$ は vector 空間, 基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ は $V$ の基, $T$, $T_1$, $T_2$ 等は $V \to$ は線形変換であるとする.
★ $A$, $B$ は $n$ 次正方行列とする.

( 7 ) $\big(T(\boldsymbol{u}_1, \cdots, T(\boldsymbol{u}_n)\big) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\,A$ となる行列 $A$ をこの基に関する $T$ の 表現行列 と呼ぶ.
( 8 ) 線形写像 $T : U \to V$ について
$\mathrm{Ker}(T) = \{\, \boldsymbol{u} \in U \,|\, T(\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}_V \,\}$ を $T$ の 核, $\mathrm{null}(T) = \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$ を $T$ の 退化次数,
$\mathrm{Im}(T) = \{\, T(\boldsymbol{u}) \,|\, \boldsymbol{u} \in U \,\}$ を $T$ の 像, $\mathrm{rank}(T) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$ を $T$ の 階数 といふ.
( 9 ) $\varphi_A(t) = |tI - A|$ を $A$ の固有多項式と称する.
(10) $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ （あるいは $T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$）となる scalar $\lambda$ と $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ が存在するとき, それぞれを $A$ の（あるいは $T$ の）固有値, 固有値 $\lambda$ に対する 固有 vector と称する.
(11) $W(\lambda, A) = \{\boldsymbol{u} \,|\, A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}\}$ を $\lambda$ に対する $A$ の 固有空間 と称する.
(12) $W(\lambda, T) = \{\boldsymbol{u} \,|\, T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}\}$ を $\lambda$ に対する $T$ の 固有空間 と称する.
(13) $\lambda$ が $A$ の固有値であるためには $\varphi_A(\lambda) = 0$ であることが必要十分.
(14) Cayley-Hamilton の定理 : $\varphi_A(A) = O$, $\varphi_T(T) = O$.
(15) Vector 空間 $V$ 線形変換 $T$ の $V$ の適当な基に関する表現行列 $A$ に対し $\varphi_T(t) = \varphi_A(t)$ と定め, これを $T$ の固有多項式と呼ぶ. $\varphi_T(t)$ は $V$ の基の選び方に依存しない.
(16) ある正則行列 $P$ が存在して $B = P^{-1}AP$ となるとき, $A$ と $B$ は 相似 であるといはれる.
(17) 正則行列 $P$ が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき, $A$ は $P$ により 対角化 されるといふ. またこのとき, $A$ は 対角化可能 であるといはれる. $T$ の表現行列 $A$ が対角化可能であるとき, $T$ は 対角化可能 であるといはれる.
(18) $A$ が対角化可能 $\iff \sum_\lambda \dim W(\lambda, A) = n$. 但し, 和は $A$ の固有値 $\lambda$ のすべてに渡る.
(19) $T$ が対角化可能 $\iff \sum_\lambda \dim W(\lambda, T) = \dim V$. 但し, 和は $T$ の固有値 $\lambda$ のすべてに渡る.
(20) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}$ が定められてゐて, 第 1 変数についても第 2 変数についても線形性を持ち, さらに任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ について $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$ が成り立ち, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0 \iff \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ を満たすとき, $V$ には内積 ( , ) が定められてゐるといひ, その様な $V$ を 内積空間 と称する.
(21) 内積空間 $V$ においては $\|\boldsymbol{u}\| = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$ なる記法を用いる. これは $\boldsymbol{u}$ の norm と呼ばれる.
(22) 内積空間において $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ となる vectors $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は直交するといはれ $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ と記される.
(23) 実正方行列 $P$ は ${}^tPP = I$ を満たすとき, 直交行列 と呼ばれる. これは $P\,{}^tP = I$ と同値である.
(24) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対して $(T(\boldsymbol{u}), T(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ となるとき $T$ は 直交変換 であるといはれる.
(25) $T$ が直交変換であることと $T$ の表現行列が直交行列であることは同値.
(26) 実正方行列 $P$ が直交行列であるためには, $A$ の列 vectors の長さが全て 1 でかつ互ひに直交することが必要十分である.
(27) ${}^tA = A$ のとき $A$ は 対称行列 と称される.
(28) どんな対称行列も直交行列により対角化される.
(29) $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ が正則行列のとき $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$ で表はされる 2 次曲線 は平行移動と直交変換により標準形 $Ax^2 + By^2 = 1$ で表される曲線に合同変形される.
(30) $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ が正則な対称行列のとき, $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + aa_{23}yz + c = 0$ で表はされる 2 次曲面 は直交変換により標準形 $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ で表される曲面に合同変形される.