実施：2018 年 7 月 4 日 (水) 14:50-16:20, 4-211 室

2018 年度　**前期　中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評　点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試 験 科 目 名	出 題 者
1/2	有	なし	80 分	線 形 代 数 3　水曜 4 時限, 教科書：Original	大 西 良 博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学 籍 番 号 (9 桁)	氏　　名
なし	理工学部	学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと．最終結果だけでは得点できない．

注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと．

注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする．

注意 4. $\boxed{\mathbf{3a}}$ と $\boxed{\mathbf{3b}}$ は選択問題である．どちらか 1 問選んで解答せよ．

$\boxed{\mathbf{1}}$ (15 点) 線形写像 $T:\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, $T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 5 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -5 & 5 & -7 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$ について, 次を求めよ．
(1) $\mathrm{Ker}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{null}(T)$,
(2) $\mathrm{Im}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{rank}(T)$.

解答 A の簡約化し, 次を得る：
(1)

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

この 2 本の vectors の第 3, 第 5 成分を見れば, これらが 1 次独立であることがわかるから, $\mathrm{Ker}(T)$ の 1 組の基としては

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

これより $\mathrm{null}(T) = 2$.
(2) 簡約化の結果から

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 5 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -5 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

の列 vectors のうち

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

が 1 次独立な最大の組をなし, 他の 2 本はこれらの線形結合で表される．よってこれらが

$$\mathrm{Im}(T) = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \middle| \ c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

の基をなす．これより $\mathrm{rank}(T) = 3$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ (15 点) $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ について $A^{11} - 95\,A^7 - 200\,I$ を求めよ．

解 C-H 定理より $A^2 - A + I = O$. これに $A + I$ を掛けると $A^3 + I = O$ を得るから, $A^2 = A - I$ と $A^3 = -I$ の両方を使って,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= -A^2 - 95A - 200I = -(A - I) - 95A - 200I \\ &= -96A - 199I = \begin{bmatrix} -103 & 288 \\ -96 & -391 \end{bmatrix} \cdots\cdots (\text{答})\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3b}}$ **の解**

$$\lambda(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\lambda \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, {}^tA\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \mu\boldsymbol{v}) = \mu(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}).$$

ゆゑに

$$(\lambda - \mu)(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$$

を得る．$\lambda \neq \mu$ より $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ である．つまり $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$.

$\boxed{\mathbf{3a}}$ (20 点) 方程式 $2x^2 + 72xy + 23y^2 + 60x - 170y - 200 = 0$ の標準形を求め, これが表す xy 平面上の図形の概形を図示せよ．

$\boxed{\mathbf{3b}}$ (20 点) A を n 次の実対称行列とせよ．$\mathbb{R}^n$ には標準内積を入れておく．$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ を A の固有値 λ, μ に対する固有 vectors とせよ．このとき $\lambda \neq \mu$ ならば $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ であることを示せよ．

$\boxed{\mathbf{3a}}$ **の解** $x = x' - x_0$, $y = y' - y_0$ を代入し, x', y' の 1 次の項が消える様にすると $(x_0, y_0) = (-3, 1)$ を得, 与式は

$$2x'^2 - 72x'y' + 23y'^2 = 25,$$

つまり

$$[x'\ y']A\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 25,\ \text{但し}\ A = \begin{bmatrix} 2 & 36 \\ 36 & 23 \end{bmatrix},$$

となる．

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \ \text{により}\ P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 50 & \\ & -25 \end{bmatrix}$$

と対角化されて

$$50x''^2 - 25y''^2 = 25 \quad \text{即ち} \quad 2x''^2 - y''^2 = 1$$

を得る．ここで

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

より

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} &= P^{-1}\begin{bmatrix} x-3 \\ y+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3(x-3) - 4(y+1) \\ 4(x-3) - 3(y+1) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3x + 9 - 4y - 4 \\ 4x - 12 - 3y - 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3x - 4y + 5 \\ 4x - 3y - 15 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

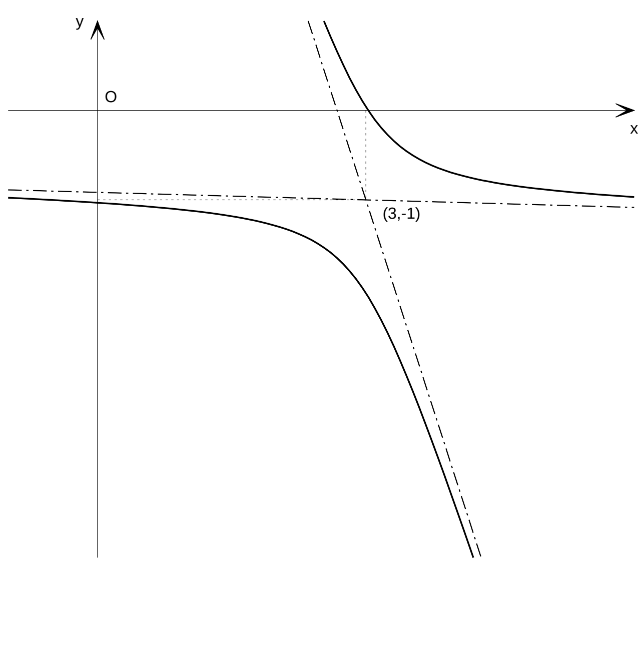
だから，（以下複号同順で）漸近線

$$y'' = \pm\sqrt{2}x''$$

の元の方程式は

$$\begin{aligned}&4x - 3y - 15 = \pm\sqrt{2}\,(-3x - 4y + 5) \quad \text{つまり} \\ &(-3 \pm 4\sqrt{2})y = (-4 \mp 3\sqrt{2})x + 15 \pm 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

である．以上から得られる概形は



$\boxed{\mathbf{4}}$ (20 点) 実対称行列 $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -2 & 3 & 4 \\ 6 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ に対し, $B = P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求め, B も記せ.

答 教科書に例があるので答のみ示す.

$$P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 6 & \\ & & -9 \end{bmatrix}.$$

学籍番号

$\boxed{\mathbf{5}}$ (15 点) 方程式 $-2x^2+3y^2-z^2-4xy+8yz+12zx=3$ で定義される 2 次曲面の標準形を求めよ. また得られた標準形の表す曲面の概略（座標軸の名称は入れること）を図示し, その曲面の名称も記せ.

解答 $\boxed{\mathbf{4}}$ の A を使ふと与式は

$$[x\ y\ z]A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3$$

と書ける. さらに $\boxed{\mathbf{4}}$ の直交行列 P を使つて $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ と直交変換（合同な変換）をすれば

$$[x'\ y'\ z']^tPAP\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = 3.$$

即ち

$$[x'\ y'\ z']\begin{bmatrix} 3 & & \\ & 6 & \\ & & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = 3.$$

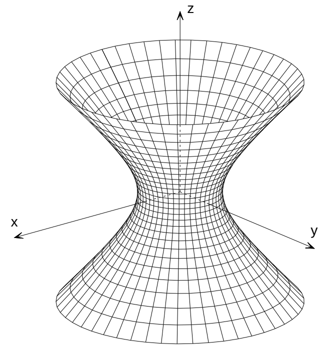
これは

$$3{x'}^2 + 6{y'}^2 - 9{z'}^2 = 3$$

と書けて, 結局直交行列 P による線形変換で与へられた曲面は

$${x'}^2 + 2{y'}^2 - 3{z'}^2 = 1$$

に変換される. これは一葉双曲面である. 概形は下記の様である.



$\boxed{\mathbf{6}}$ (10 点) T を内積空間 V の線形変換とする. T が直交変換であるためには T がどの vector の長さも変へないこと, 即ち $\|T(\boldsymbol{u})\| = \|\boldsymbol{u}\|$ が全ての $\boldsymbol{u} \in V$ について成り立つことが必要十分であることを示せ. 但し $\|\boldsymbol{u}\|$ は $\boldsymbol{u}$ の norm を表す.

解答 (必要性) 定義で $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ とすればよい.
(十分性)

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + \|\boldsymbol{v}\|^2 &= (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\|^2 \\ &= \big(T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}), T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\big) \\ &= \|T(\boldsymbol{u})\|^2 + 2(T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v})) + \|T(\boldsymbol{v})\|^2 \\ &= \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2(T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v})) + \|\boldsymbol{v}\|^2. \end{aligned}$$

よつて

$$(T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$$

がいへる.

実施：2018 年 7 月 4 日 (水) 14:50-16:20, 4-211 室

2018 年度 **前期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
2/2	有	なし	80 分	線形代数 3 水曜 4 時限, 教科書：Original	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

$\boxed{7}$ (5 点) 次の問に答へよ.

(1) $M \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ を n 次正則行列とし, その固有値を $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ とする. このとき, M^{-1} の固有値は ${\alpha_1}^{-1}, \cdots, {\alpha_n}^{-1}$ であることを示せ.

(2) 交代行列 $H \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ (つまり ${}^tH = -H$) は -1 を固有値に持たないことを示せ.

(Hint : $\boldsymbol{u}$ と $H\boldsymbol{u}$ との標準内積を利用して $H\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$ ならば $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ となることを示せ.)

(3) 直交行列 $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ について $|A| = -1$ ならば -1 は A の固有値であることを証明せよ.

(Hint : 行列式が -1 であるいくつかの直交行列の固有多項式を挙げておく. $t^3 - \frac{3}{7}t^2 - \frac{3}{7}t + 1$, $t^4 + \frac{4}{9}t^3 - \frac{4}{9}t - 1$, $t^5 - \frac{3}{5}t^4 - \frac{2}{5}t^3 - \frac{2}{5}t^2 - \frac{3}{5}t + 1$.)

(4) H が成分を有理数とする交代行列のとき $f(H) = (I - H)(I + H)^{-1}$ は, -1 を固有値に持たず, しかも成分がすべて有理数である様な直交行列であることを示せ. さらに, f は $\{H \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{Q}) \,|\, H$ は交代行列$\}$ から $\{T \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{Q}) \,|\, T$ は $|T| = 1$ かつ -1 を固有値に持たない直交行列$\}$ への全単射であることを示し, これの逆の対応を求めよ.

解答 (1) それぞれの固有多項式の間の関係

$$\varphi_M(t) = |tI - M| = |M^{-1} - t^{-1}I| \cdot |M|\, t^n = \varphi_{M^{-1}}(t^{-1})\, |M|\, t^n$$

から, $\lambda \neq 0$ について

$$\varphi_M(\lambda) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi_{M^{-1}}(\lambda^{-1}) = 0.$$

(2) $H\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$ となつたとせよ. このとき

$$\|\boldsymbol{u}\|^2 = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = (-H\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = -(H\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = -(\boldsymbol{u}, {}^tH\boldsymbol{u}) = -(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = -\|\boldsymbol{u}\|^2$$

となり $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ を得るので, -1 は固有値足り得ない.

(3) A の固有値の全体を重複も込めて $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ とおくと, (1) により, これらと ${\alpha_1}^{-1}, \cdots, {\alpha_n}^{-1}$ は順序を無視して完全に一致する. $|A| = -1$ より $\alpha_1 \cdots \alpha_n = -1$. これらのことから, 例へば解と係数の関係を使つて n が偶数ならば, $\varphi_A(t)$ の係数を降冪順に並べたものは, 昇冪順に並べたものの 全体に -1 を掛けたものになり, n が奇数であれば, それらは一致することがわかる. ちなみに, このことから n が偶数ならは $\varphi_A(t)$ の中央の係数は 0 である. このことから, n の偶奇によらず $\varphi_A(t)$ は $t + 1$ で割り切れる.

(4) $I - H$ と $I + H$ は可換なので $(I - H)^{-1}$ と $I + H$ は可換であることに注意して, ${}^tH = -H$ より

$${}^tf(H) = {}^t((I - H)(I + H)^{-1}) = (I + {}^tH)^{-1}(I - {}^tH) = (I - H)^{-1}(I + H) = (I + H)(I - H)^{-1}.$$

ゆゑに

$${}^tf(H)\, f(H) = f(H)\, {}^tf(H) = I$$

であり, $f(H)$ は直交行列である.

$$\varphi_{f(H)}(-1) = |-I - f(H)| = |-I - (I - H)(I + H)^{-1}| = |-I| \cdot |(I + H) + (I - H)| \cdot |(I + H)^{-1}| \neq 0 = |-I| \cdot |2I| \cdot |(I + H)^{-1}| \neq 0.$$

となり, -1 は $f(H)$ の固有値ではない. f の逆写像は

$$T \;\longmapsto\; g(T) = (I + T)^{-1}(I - T)$$

である. 実際

$$g(f(H)) = (I + (I - H)(I + H)^{-1})^{-1}(I - (I - H)(I + H)^{-1}) = ((I + H) + (I - H))^{-1}((I + H) - (I - H)) = (2I)^{-1}(2H) = H.$$

逆の $f(g(T) = T$ も同様に示される. よつて f, g は互いに逆写像であり, どちらも全単射である.

記　号

$\mathbb{N}$ ⋯ 自然数全体, $\mathbb{Z}$ ⋯ 整数全体のなす環, $\mathbb{Q}$ ⋯ 有理数全体のなす体,
$\mathbb{R}$ ⋯ 実数全体のなす体, $\mathbb{C}$ ⋯ 複素数全体のなす体, I ⋯ 単位行列.

既習事項のまとめ

(1) 行列の 主成分 とは, 各行における 0 でない最も左にある成分のことである. 従つて主成分が存在しない行もあり得る.
(2) 簡約行列 とは "右下りの優しい階段状" の行列であつて, 主成分がすべて 1 で, 主成分のある行は主成分以外はすべて 0 であるもののこと.
(3) どんな行列も基本変形（掃き出し法）により簡約行列に変形（簡約化）でき, 結果は一意的である. それにより, 連立 1 次方程式を解くことができる.
(4) Vector 空間 V の部分集合 X について, その中に r 個の vectors からなる 1 次独立な組があり, しかも X のどんな r+1 個の vectors も 1 次従属であるとき, r を X の 最大 1 次独立数 と呼ぶ.
(5) Vector 空間 V の最大 1 次独立数を与へる集合 B を V の 基 または 基底 といふ. r を V の 次元 と呼んで $\dim(V)$ または $\dim V$ と記す.
(6) Vector 空間 V からそれ自身への線形写像を 線形変換 といふ.

★ 以下 V は vector 空間, 基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ は V の基, T, T_1, T_2 等は $V \to$ は線形変換であるとする.
★ A, B は n 次正方行列とする.

(7) $\big(T(\boldsymbol{u}_1, \cdots, T(\boldsymbol{u}_n)\big) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\,A$ となる行列 A をこの基に関する T の 表現行列 と呼ぶ.
(8) 線形写像 $T : U \to V$ について
$\mathrm{Ker}(T) = \{\, \boldsymbol{u} \in U \,|\, T(\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}_V \,\}$ を T の 核, $\mathrm{null}(T) = \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$ を T の 退化次数,
$\mathrm{Im}(T) = \{\, T(\boldsymbol{u}) \,|\, \boldsymbol{u} \in U \,\}$ を T の 像, $\mathrm{rank}(T) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$ を T の 階数 といふ.
(9) $\varphi_A(t) = |tI - A|$ を A の固有多項式と称する.
(10) $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ （あるいは $T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$）となる scalar λ と $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ が存在するとき, それぞれを A の（あるいは T の）固有値, 固有値 λ に対する 固有 vector と称する.
(11) $W(\lambda, A) = \{\boldsymbol{u} \,|\, A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}\}$ を λ に対する A の 固有空間 と称する.
(12) $W(\lambda, T) = \{\boldsymbol{u} \,|\, T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}\}$ を λ に対する T の 固有空間 と称する.
(13) λ が A の固有値であるためには $\varphi_A(\lambda) = 0$ であることが必要十分.
(14) Cayley-Hamilton の定理 : $\varphi_A(A) = O$, $\varphi_T(T) = O$.
(15) Vector 空間 V 線形変換 T の V の適当な基に関する表現行列 A に対し $\varphi_T(t) = \varphi_A(t)$ と定め, これを T の固有多項式と呼ぶ. $\varphi_T(t)$ は V の基の選び方に依存しない.
(16) ある正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ となるとき, A と B は 相似 であるといはれる.
(17) 正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき, A は P により 対角化 されるといふ. またこのとき, A は 対角化可能 であるといはれる. T の表現行列 A が対角化可能であるとき, T は 対角化可能 であるといはれる.
(18) A が対角化可能 $\iff \sum_\lambda \dim W(\lambda, A) = n$. 但し, 和は A の固有値 λ のすべてに渡る.
(19) T が対角化可能 $\iff \sum_\lambda \dim W(\lambda, T) = \dim V$. 但し, 和は T の固有値 λ のすべてに渡る.
(20) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}$ が定められてゐて, 第 1 変数についても第 2 変数についても線形性を持ち, さらに任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ について $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$ が成り立ち, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0 \iff \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ を満たすとき, V には内積 (,) が定められてゐるといひ, その様な V を 内積空間 と称する.
(21) 内積空間 V においては $\|\boldsymbol{u}\| = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$ なる記法を用いる. これは $\boldsymbol{u}$ の norm と呼ばれる.
(22) 内積空間において $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ となる vectors $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ は直交するといはれ $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ と記される.
(23) 実正方行列 P は ${}^tPP = I$ を満たすとき, 直交行列 と呼ばれる. これは $P{}^tP = I$ と同値である.
(24) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対して $(T(\boldsymbol{u}), T(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ となるとき T は 直交変換 であるといはれる.
(25) T が直交変換であることと T の表現行列が直交行列であることは同値.
(26) 実正方行列 P が直交行列であるためには, A の列 vectors の長さが全て 1 でかつ互ひに直交することが必要十分である.
(27) ${}^tA = A$ のとき A は 対称行列 と称される.
(28) どんな対称行列も直交行列により対角化される.
(29) $A = [a_{ij}]_{2\times2}$ が正則行列のとき $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$ で表はされる 2 次曲線 は平行移動と直交変換により標準形 $Ax^2 + By^2 = 1$ で表される曲線に合同変形される.
(30) $A = [a_{ij}]_{3\times3}$ が正則な対称行列のとき, $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + aa_{23}yz + c = 0$ で表はされる 2 次曲面 は直交変換により標準形 $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ で表される曲面に合同変形される.