実施：2019 年 6 月 24 日 (月) 10:50-12:20, 4-203 室

開講学部	評点小計
理工学部	

評　点

2019 年度　**前期　中間試験** (問題 兼 解答用紙)

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
1/2	有	なし	80 分	線形代数 3　月曜 2 時限, 教科書：Original	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏　名
なし	理工学部	学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする.

1 (15 点) 線形写像 $T:\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, $T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 10 & 5 & -1 & 11 \\ 3 & -15 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$ について, 次を求めよ.

(1) $\mathrm{Ker}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{null}(T)$,　(2) $\mathrm{Im}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{rank}(T)$.

2 (15 点) x は不定元とする. $\mathbb{R}[x]_3$ の元

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2 + x - 3x^2 - x^3, \\ f_2(x) &= 1 - x - x^2 - 2x^3, \\ f_3(x) &= -4 - 5x + 7x^2 - x^3, \\ f_4(x) &= 3 + 2x^2 - x^3, \\ f_5(x) &= -11 + 2x + 2x^2 + 9x^3 \end{aligned}$$

について, これらの vectors がなす組の中で 1 次独立な最大個数 r を求めよ. また, r 個の 1 次独立な組を, 前の方を優先して選び出し, 他の vectors をそれらの 1 次結合で表せ.

3 (15 点) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}$ について答へよ. (1) A の固有多項式 $\varphi_A(t)$ を求めよ. (2) $f(t) = 4t^5 - 3t^3 - 2t^2 - 6t + 5$ を $\varphi_A(t)$ で割つたときの余りを求めよ. (3) $f(A)$ を求めよ.

$\boxed{4}$ (15 点) 線形変換 $T:\mathbb{R}[x]_2\to\mathbb{R}[x]_2,\ T(f(x))=2f'(x)(x+1)-f(-1)x^2-f(2)$ について, $\mathbb{R}[x]_2$ の基 $\{1-2x,\ 1-x^2,\ x+x^2\}$ 関する表現行列 B を求めよ.

$\boxed{5}$ (15 点) 線形変換 $T:\mathbb{R}[x]_2\longrightarrow\mathbb{R}[x]_2,\ T\big(f(x)\big)=2f'(x)(x+1)-f(-1)x^2-f(2)$ について (i) 固有多項式 $\varphi_T(t)$, (ii) T の固有値, (iii) T の各固有値 λ に属する $W(\lambda,T)$ を求めよ.

学籍番号

$\boxed{6}$ (20 点) $A=\begin{bmatrix}-9&4&-8\\-8&3&-8\\8&-4&7\end{bmatrix}$ について

(1) A の固有多項式 $\varphi_A(t)$ を求めよ.

(2) A は $\mathbb{R}$ 上で対角化可能か. 不可能な場合は理由を述べ, 可能である場合は対角化せよ.
(即ち $B=P^{-1}AP$ が対角行列となる様な $P\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ を求めよ.)

(3) A^n を, その各成分を n の式で表して記せ.

$\boxed{7}$ (5 点) V を $\mathbb{R}$ の n 次元 vector 空間とせよ. T を V の線形変換とし $T^n=O,\ T^{n-1}\neq O$ とする. さらに $\boldsymbol{u}\in V$ が存在して $T^{n-1}(\boldsymbol{u})\neq\boldsymbol{0}$ であるとする. このとき $B=\{T^{n-1}(\boldsymbol{u}),\ \cdots,\ T(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{u}\}$ が V の基であることを示し, この基に関する T の表現行列を求めよ.
(Hint : $c_1T^{n-1}(\boldsymbol{u})+c_2T^{n-2}(\boldsymbol{u})+\cdots+c_{n-1}T(\boldsymbol{u})+c_n\,\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ として, これを $T^{n-1},\cdots,T$ で写してみると$\cdots$)

記　号

$\mathbb{N}$ … 自然数全体, $\mathbb{Z}$ … 整数全体のなす環, $\mathbb{Q}$ … 有理数全体のなす体,
$\mathbb{R}$ … 実数全体のなす体, $\mathbb{C}$ … 複素数全体のなす体, $\mathbf{K}$ … 一般の体, I … 単位行列,
$\mathrm{Mat}(m,n,\mathbf{K})$ … $m\times n$ 行列, $\mathrm{Mat}(n,\mathbf{K})$ … n 次正方行列, $\mathrm{GL}(n,\mathbf{K})$ … n 次正則行列.

既習事項のまとめ

(1) 行列の 主成分 とは, 各行における 0 でない最も左にある成分のことである. 従つて主成分が存在しない行もあり得る.
(2) 簡約行列 とは “右下りの優しい階段状” の行列であつて, 主成分がすべて 1 で, 主成分のある列は主成分以外はすべて 0 である様なもののこと.
(3) どんな行列も基本変形（掃き出し法）により簡約行列に変形（簡約化）でき, 結果は一意的である. それにより, 連立 1 次方程式を解くことができる.
(4) Vector 空間 V の部分集合 X について, その中に r 個の vectors からなる 1 次独立な組があり, しかも X のどんな $r{+}1$ 個の vectors も 1 次従属であるとき, r を X の 最大 1 次独立数 と呼ぶ.
(5) Vector 空間 V の最大 1 次独立数を与へる集合 B を V の 基 または 基底 といふ. r を V の 次元 と呼んで $\dim(V)$ または $\dim V$ と記す.
(6) $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 U から $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 V への写像 T は, 任意の $a,b\in\mathbf{K}$ と任意の $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\in U$ に対し $T(a\boldsymbol{u}_1+b\boldsymbol{u}_2)=aT(\boldsymbol{u}_1)+bT(\boldsymbol{u}_2)$ を満たすとき 線形写像 と呼ばれる.
(7) Vector 空間 V からそれ自身への線形写像を 線形変換 といふ.
(8) $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 U の基 $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ と vector 空間 V の基 $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m\}$, および線形写像 $T:U\to V$ が与へられたとき, $\bigl(T(\boldsymbol{u}_1),\cdots,T(\boldsymbol{u}_n)\bigr)=(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m)A$ なる $A\in\mathrm{Mat}(m,n,\mathbf{K})$ を T のこれらの基に関する 表現行列 と呼ぶ.
(9) 線形写像 $T:U\to V$ について
$\mathrm{Ker}(T)=\{\,\boldsymbol{u}\in U\mid T(\boldsymbol{u})=\mathbf{0}_V\,\}$ を T の 核, $\mathrm{null}(T)=\dim\bigl(\mathrm{Ker}(T)\bigr)$ を T の 退化次数,
$\mathrm{Im}(T)=\{\,T(\boldsymbol{u})\mid\boldsymbol{u}\in U\,\}$ を T の 像, $\mathrm{rank}(T)=\dim\bigl(\mathrm{Im}(T)\bigr)$ を T の 階数 といふ.

★ 以下 V は vector 空間, $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ は V の基, T は V の線形変換であるとする.
★ A は n 次正方行列とする.

(10) $\varphi_A(t)=|tI-A|$ を A の 固有多項式 と称する.
(11) $A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$ （あるいは $T(\boldsymbol{u})=\lambda\boldsymbol{u}$）となる scalar λ と $\boldsymbol{u}\neq\mathbf{0}$ が存在するとき, それぞれを A の（あるいは T の）固有値, 固有値 λ に対する 固有 vector と称する.
(12) $W(\lambda,A)=\{\boldsymbol{u}\mid A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}\}$ を λ に対する A の 固有空間 と称する.
(13) $W(\lambda,T)=\{\boldsymbol{u}\mid T(\boldsymbol{u})=\lambda\boldsymbol{u}\}$ を λ に対する T の 固有空間 と称する.
(14) λ が A の固有値であるためには $\varphi_A(\lambda)=0$ であることが必要十分.
(15) Vector 空間 V 線形変換 T の V の適当な基に関する表現行列 A に対し $\varphi_T(t)=\varphi_A(t)$ と定め, これを T の固有多項式と呼ぶ. $\varphi_T(t)$ は V の基の選び方に依存しない.
(16) Cayley-Hamilton の定理 : $\varphi_A(A)=O$, $\varphi_T(T)=O$.
(17) ある正則行列 P が存在して $B=P^{-1}AP$ となるとき, A と B は 相似 であるといはれる.
(18) 正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき, A は P により 対角化 されるといふ. またこのとき, A は 対角化可能 であるといはれる. T の表現行列 A が対角化可能であるとき, T は 対角化可能 であるといはれる.
(19) A が対角化可能 $\Longleftrightarrow \sum_\lambda \dim W(\lambda,A)=n$. 但し, 和は A の固有値 λ のすべてに渡る.
(20) T が対角化可能 $\Longleftrightarrow \sum_\lambda \dim W(\lambda,T)=\dim V$. 但し, 和は T の固有値 λ のすべてに渡る.