実施 : 2020 年 8 月 4 日 (火) 14:50-16:20, 場所 自宅 等

2020 年度 **前期 定期試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評 点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
1/7	有	なし	90 分	線形代数 3 火曜 4 時限, 教科書 : Original	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9 桁)	氏 名
なし	理工学部	学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 教科書はもちろん, 本問題用紙以外のものを見てはいけない.
注意 3. 裏面は使用してはならない. 各問題用紙の表面に収まる様に答案を作成せよ.
注意 4. あなた 1 人だけの静寂な環境で解答を作成すること.
注意 5. その他, “Class room” に記した注意を守ること.

$\boxed{\mathbf{1}}$ (15 点) 次の $\mathbb{R}^4$ の元の組の 1 次独立な最大の組を求めよ : A0049

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} -16 \\ 7 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_6 = \begin{bmatrix} -6 \\ 11 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

但し, 番号の小さいものを優先させよ. さらに, それ以外の vectors をそれらの 1 次結合で表せ.

実施：2020 年 8 月 4 日 (火) 14:50-16:20, 場所 自宅 等

2020 年度 **前期 定期試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
2/7	有	なし	90 分	線形代数 3 火曜 4 時限, 教科書：Original	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

A0049

2 (15 点) x は不定元とする. $\mathbb{R}[x]_3$ の元

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= 2 - 2x + x^2 + x^3,\\
f_2(x) &= -6 + 6x - 3x^2 - 3x^3,\\
f_3(x) &= 2 + x - x^2 - x^3,\\
f_4(x) &= -16 + 7x - 2x^2 - 2x^3,\\
f_5(x) &= 2 + 2x + x^2 + x^3,\\
f_6(x) &= -6 + 11x - x^2 - x^3
\end{aligned}$$

について, これらの vectors がなす組の中で 1 次独立な最大個数 r を求めよ. また, r 個の 1 次独立な組を, 前の方を優先して選び出し, 他の vectors をそれらの 1 次結合で表せ. (**1** の計算を利用してよい.)

実施：2020 年 8 月 4 日 (火) 14:50-16:20, 場所 自宅 等

2020 年度 **前期 定期試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
3/7	有	なし	90 分	線形代数 3 火曜 4 時限, 教科書：Original	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

A0049

3 (15 点) 線形写像

$$T:\mathbb{R}^6\to\mathbb{R}^4,\quad T(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x},\ \text{但し}\ A=\begin{bmatrix} 2 & -6 & 2 & -16 & 2 & -6 \\ -2 & 6 & 1 & 7 & 2 & 11 \\ 1 & -3 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

について, 次を求めよ. (**1** の計算を利用してよい.)

(1) Ker(T) の 1 組の基と null(T).

(2) Im(T) の 1 組の基と rank(T).

2020 年度 **前期 定期試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
4/7	有	なし	90 分	線形代数 3 火曜 4 時限, 教科書：Original	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

$\boxed{4}$ (15 点) $\mathbb{R}[x]_2$ の部分集合 $W = \{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_2 \mid f(3) = 0,\ f(2) + f'(1) = 0 \,\}$ について,

(1) W は $\mathbb{R}[x]_2$ の $\mathbb{R}$ 上の部分空間であることを示せ.

(2) W の基を 1 組与へよ. A0049

実施：2020 年 8 月 4 日 (火) 14:50-16:20, 場所 自宅 等

2020 年度 **前期 定期試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
5/7	有	なし	90 分	線形代数 3 火曜 4 時限, 教科書：Original	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

5 (15 点) Vector 空間 V において 1 次関係

$$\boldsymbol{v}_1 = 3\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + 5\boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{u}_1 - 3\boldsymbol{u}_2 - 2\boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{v}_4 = 3\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 - 2\boldsymbol{u}_3$$

があるとき, **既習事項のまとめ** (12) により $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ は 1 次従属である. これらの間に必ず成り立つ非自明な 1 次関係を 1 つ挙げよ. A0049

実施：2020 年 8 月 4 日 (火) 14:50-16:20, 場所 自宅 等

2020 年度 **前期 定期試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
6/7	有	なし	90 分	線形代数 3 火曜 4 時限, 教科書：Original	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

$\boxed{6}$ (15 点) 線形変換 $T:\mathbb{R}[x]_2\to\mathbb{R}[x]_2$, $T(f(x))=-f''(x)(x+1)(x-2)-2f(-x)+f(0)(x-4)$ について, A0049

(1) T が $\mathbb{R}$ 上の線形写像であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}[x]_2$ の基 $\{1,\ x,\ x^2\}$ に関する表現行列 A を求めよ.

(3) $\mathbb{R}[x]_2$ の基 $\{x,\ 6-2x+3x^2,\ -8+x\}$ に関する表現行列 B を求めよ.

2020 年度 **前 期 定 期 試 験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試 験 科 目 名	出 題 者
7/7	有	なし	90 分	線形代数 3 火曜 4 時限, 教科書：Original	大 西 良 博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9 桁)	氏 名
なし	理工学部	学科	年			

$\boxed{\mathbf{7}}$ (10 点) V を $\mathbf{K}$ 上の n 次元 vector 空間とせよ. T を V の線形変換とし $T^n = O,\ T^{n-1} \neq O$ とする. さらに $\boldsymbol{u} \in V$ が存在して $T^{n-1}(\boldsymbol{u}) \neq \mathbf{0}$ であるとする. このとき

$$B = \{\, T^{n-1}(\boldsymbol{u}),\ \cdots,\ T(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{u} \,\}$$

が V の基であることを示し, この基に関する T の表現行列を求めよ.

（Hint：前半は, B の元に関する 1 次関係の両辺を $T^{n-1}, T^{n-2}, \cdots T$ で写しながら, $T^n = O$ を使へ. 後半はとても易しい. ）

記　号

$\mathbb{N}$ ⋯ 自然数全体,
$\mathbb{Z}$ ⋯ 整数全体のなす環,
$\mathbb{Q}$ ⋯ 有理数全体のなす体,
$\mathbb{R}$ ⋯ 実数全体のなす体,
$\mathbb{C}$ ⋯ 複素数全体のなす体,
$\mathbf{K}$ ⋯ 一般の体,
I ⋯ 単位行列,
$\mathrm{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ ⋯ $m \times n$ 行列,
$\mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ ⋯ n 次正方行列,
$\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ ⋯ n 次正則行列.

既習事項のまとめ

(1) 行列の主成分とは, 各行における 0 でない最も左にある成分のことである. 従つて主成分が存在しない行もあり得る.

(2) 簡約行列とは“右下りの優しい階段状”の行列であつて, 主成分がすべて 1 で, 主成分のある列は主成分以外はすべて 0 である様なもののこと.

(3) どんな行列も基本変形（掃き出し法）により簡約行列に変形（簡約化）でき, 結果は一意的である. それにより, 連立 1 次方程式を解くことができる.

(4) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ について $[A \,|\, \boldsymbol{b}]$ をこの連立 1 次方程式の拡大係数行列とよぶ.

(5) **簡約化による連立 1 次方程式の解法**. 連立 1 次方程式の拡大係数行列に対して,
(i) ある行に 0 ではない定数を掛ける;
(ii) 2 つの行を入れ替へる;
(iii) ある行**に**別の行の定数倍を加へる,
の操作（1 回にどれか 1 つ）を何回か行なつて簡約化すれば, いかなる連立 1 次方程式をも解くことができる.

(6) 集合 V と体 $\mathbf{K}$ について, 和と scalar 倍と呼ばれる演算 $V \times V \to V$, $\mathbf{K} \times V \to V$ が定義されてゐて, 和に関して群をなし, 和と scalar 倍について分配法則が成り立ち, さらに, “ごく自然な演算規則群”が成り立つとき, V は $\mathbf{K}$ 上の vector 空間と呼ばれる.

(7) Vector 空間 V の和に関する単位元を零 vector と呼んで $\mathbf{0}$ で表す.

(8) Vector 空間 V の部分集合 W は,
S1. $\mathbf{0} \in W$,
S2. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$ ならば $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$,
S3. $c \in \mathbf{K}$, $\boldsymbol{u} \in W$ ならば $c\boldsymbol{u} \in W$
の 3 つがすべて成り立つとき, V の部分空間と呼ばれる.

(9) $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m \in V$ と $c_1, \cdots, c_n \in \mathbf{K}$ について, $c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n$ の形の式を $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合といひ, $c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \mathbf{0}$ なる式が成り立つとき, これを $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次関係といふ.

(10) $0\boldsymbol{u}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{u}_n = \mathbf{0}$ はいつでも正しい. これを自明な 1 次関係といふ.

(11) $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m \in V$ が自明でない 1 次関係しか満たさないとき, これらは 1 次独立であるといはれる.
また, 自明でない 1 次関係を満たすとき, これらは 1 次従属であるといはれる.

(12) （**補題 6.3.8**） V の vectors の 2 つの組 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ について, ① $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ のどれもが $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で書けて, ② $n > m$ であるならば, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次従属である.

(13) （**系 6.3.9**） V の vectors の 2 つの組 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ について, ① $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ のどれもが $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で書けて, ② $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立, であるならば $n \leq m$ である.

(14) V の空でない部分集合 S が与へられたとせよ. S から選んだ vectors の組が 1 次独立で, それ以外のいかなる S vector を付け加へても 1 次従属になるとき, その組を S の最大 1 次独立な組と称し, それを構成する vectors の個数を S の最大 1 次独立数とよぶ.

(15) （**命題 6.4.9**） $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m \in V$ を 1 次独立な vectors とし,

$$(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)A$$

と書けてゐるとし, $A = [\,\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n\,]$ とする.
このとき, $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ には同じ 1 次関係が成り立つ.

(16) $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \in V$ の 1 次結合の全体は V の部分空間をなす. それを, これらの vectors で生成される部分空間と呼び, $\langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ や $\mathbf{K}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \mathbf{K}\boldsymbol{u}_n$ で表す.

(17) （**系 6.5.11**） Vector 空間 V に属する vectors の組 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ の最大 1 次独立数を与へる組は, 部分空間 $\langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ の基をなす.

(18) 写像 $T : U \to V$ が, 任意の $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$, $c \in \mathbf{K}$ について
L1. $T(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = T(\boldsymbol{u}_1) + T(\boldsymbol{u}_2)$,
L2. $T(c\boldsymbol{u}_1) = cT(\boldsymbol{u}_1)$
をともに満たすとき, T は線形写像といはれる. 線形写像は零 vector を零 vector に写す.

(19) T を vector 空間 U から同 V への線形写像とする. このとき

$$\mathrm{Ker}(T) = \{\boldsymbol{u} \in U \,|\, T(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_V\},$$
$$\mathrm{Im}(T) = \{T(\boldsymbol{u}) \,|\, \boldsymbol{u} \in U\}$$

とおく. これらはそれぞれ U, V の部分空間であり, $\mathrm{Ker}(T)$ を T の核, $\mathrm{Im}(T)$ を T の像と呼ぶ. さらに

$$\mathrm{rank}(T) = \dim(\mathrm{Im}(T)),$$
$$\mathrm{null}(T) = \dim(\mathrm{Ker}(T))$$

と定め, それぞれ T の階数, 退化次数といふ.

(20) 例へば $A \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbf{R})$ で, $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ のときは

$$\mathrm{Ker}(T) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \,|\, A\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\},$$
（ 連立 1 次方程式 $A\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間 ）
$$\mathrm{Im}(T) = \{A\,\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\},$$
（ 空間 $\mathbb{R}\boldsymbol{a}_1 + \mathbb{R}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mathbb{R}\boldsymbol{a}_n$ ）

である.

(21) $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 U から $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 V への写像 T は, 任意の $a, b \in \mathbf{K}$ と任意の $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$ に対し $T(a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2) = aT(\boldsymbol{u}_1) + bT(\boldsymbol{u}_2)$ を満たすとき線形写像と呼ばれる.

(22) Vector 空間 V からそれ自身への線形写像を線形変換といふ.

(23) $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 U の基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ と vector 空間 V の基 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$, および線形写像 $T : U \to V$ が与へられたとき,

$$\big(T(\boldsymbol{u}_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}_n)\big) = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m)A$$

なる $A \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ を T のこれらの基に関する表現行列と呼ぶ.