実施：2021 年 8 月 3 日 (火) 10:50-12:20, 4-202 室

2021 年度 **前期 定期試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評 点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
1, 両面	有	なし	80 分	線形代数 3 火曜 4 時限, 教科書：Original	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする.
注意 4. 時間の許す限り検算をせよ.

1 (15 点) 線形写像 $T\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$,

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -3 & -9 & 2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & 6 & -2 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & -6 & 3 & 5 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

について, 次を求めよ.

(1) $\mathrm{Ker}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{null}(T)$.

(2) $\mathrm{Im}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{rank}(T)$.

2 (15 点) x は不定元とする. $\mathbb{R}[x]_3$ の元

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -3 + 2x - 2x^2 + x^3, \\ f_2(x) &= -9 + 6x - 6x^2 + 3x^3, \\ f_3(x) &= 2 - 2x + 3x^2 - 2x^3, \\ f_4(x) &= 5 - 2x + 5x^2 + x^3, \\ f_5(x) &= 1 + 9x^2 + x^3, \\ f_6(x) &= 7 - 2x + 3x^2 + 3x^3 \end{aligned}$$

について, これらの vectors がなす組の中で 1 次独立な最大個数 r を求めよ. また r 個の 1 次独立な組を, 前の方を優先して選び出し, 他の vectors をそれらの 1 次結合で表せ.

3 (15 点) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$ について答へよ.

(1) A の固有多項式 $\varphi_A(t)$ を求めよ.

(2) $f(t) = t^5 - 7t^4 + 10t^3 + 5t^2 + 8t + 18$ を $\varphi_A(t)$ で割つたときの余りを求めよ.

(3) $f(A)$ を求めよ.

学籍番号

$\boxed{\mathbf{4}}$ (15 点) 線形変換 $T:\mathbb{R}[x]_2\to\mathbb{R}[x]_2$,

$$T(f(x)) = -f''(x)\cdot x(x+2) - 2f(-x) + f(0)(x-2)$$

について, $\mathbb{R}[x]_2$ の基 $\{\,1+x,\ \ 1-x,\ \ x+x^2\,\}$ 関する表現行列 B を求めよ.

$\boxed{\mathbf{5}}$ (20 点) $A=\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -3 & 5 & 3 \\ 6 & -6 & -4 \end{bmatrix}\in \mathrm{Mat}(3,\mathbb{C})$ について答へよ.

(1) A の固有多項式 $\varphi_A(t)$ を求めよ.

(2) A は（$\mathbb{C}$ 上で）対角化可能か. 不可能な場合は理由を述べ, 可能である場合は対角化せよ. （$B=P^{-1}AP$ が対角行列となる様な $P\in \mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$）

(3) A^n を, その各成分を n の式で表して記せ.

$\boxed{\mathbf{6}}$ (5 点) V を $\mathbb{R}$ 上の n 次元 vector 空間とせよ. T を V の線形変換とし $T^n=O, T^{n-1}\neq O$ とする. 従つて $\boldsymbol{u}\in V$ が存在して $T^{n-1}(\boldsymbol{u})\neq \mathbf{0}$ である. この様な $\boldsymbol{u}$ について $B=\{\,T^{n-1}(\boldsymbol{u}),\ \cdots,\ T(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{u}\,\}$ が V の基であることを示し, この基に関する T の表現行列を求めよ.

(Hint : $c_1T^{n-1}(\boldsymbol{u})+c_2T^{n-2}(\boldsymbol{u})+\cdots+c_{n-1}T(\boldsymbol{u})+c_n\,\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$ として, これを $T^{n-1},\cdots,T$ で写してみると⋯)

$\boxed{\mathbf{7}}$ (15 点) 次の $\mathbb{R}^4$ 内の 3 つの vectors に対し, この順で Gram-Schmidt の方法を用いることで, これらの vectors の生成する部分空間ので正規直交基を 1 組求めよ : $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ -9 \\ 2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

記　号

$\mathbb{N}$ … 自然数全体, $\mathbb{Z}$ … 整数全体のなす環, $\mathbb{Q}$ … 有理数全体のなす体,
$\mathbb{R}$ … 実数全体のなす体, $\mathbb{C}$ … 複素数全体のなす体, $\mathbf{K}$ … 一般の体, I … 単位行列,
$\mathrm{Mat}(m,n,\mathbf{K})$ … $m\times n$ 行列, $\mathrm{Mat}(n,\mathbf{K})$ … n 次正方行列, $\mathrm{GL}(n,\mathbf{K})$ … n 次正則行列.

既習事項のまとめ

(1) 行列の主成分とは, 各行における 0 でない最も左にある成分のことである. 従つて主成分が存在しない行もあり得る.

(2) 簡約行列とは“右下りの優しい階段状”の行列であつて, 主成分がすべて 1 で, 主成分のある列は主成分以外はすべて 0 である様なもののこと.

(3) どんな行列も基本変形（掃き出し法）により簡約行列に変形（簡約化）でき, 結果は一意的である. それにより, 連立 1 次方程式を解くことができる.

(4) Vector 空間 V の部分集合 X について, その中に r 個の vectors からなる 1 次独立な組があり, しかも X のどんな $r{+}1$ 個の vectors も 1 次従属であるとき, r を X の最大 1 次独立数と呼ぶ.

(5) Vector 空間 V の最大 1 次独立数を与へる集合 B を V の基または基底といふ. r を V の次元と呼んで $\dim(V)$ または $\dim V$ と記す.

(6) $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 U から $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 V への写像 T は, 任意の $a,b\in\mathbf{K}$ と任意の $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2\in U$ に対し $T(a\boldsymbol{u}_1+b\boldsymbol{u}_2)=aT(\boldsymbol{u}_1)+bT(\boldsymbol{u}_2)$ を満たすとき線形写像と呼ばれる.

(7) Vector 空間 V からそれ自身への線形写像を線形変換といふ.

(8) $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 U の基 $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ と vector 空間 V の基 $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m\}$, および線形写像 $T:U\to V$ が与へられたとき, $\big(T(\boldsymbol{u}_1),\cdots,T(\boldsymbol{u}_n)\big)=(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m)A$ なる $A\in\mathrm{Mat}(m,n,\mathbf{K})$ を T のこれらの基に関する表現行列と呼ぶ.

(9) 線形写像 $T:U\to V$ について
$\mathrm{Ker}(T)=\{\,\boldsymbol{u}\in U\,|\,T(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0}_V\,\}$ を T の核, $\mathrm{null}(T)=\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$ を T の退化次数,
$\mathrm{Im}(T)=\{\,T(\boldsymbol{u})\,|\,\boldsymbol{u}\in U\,\}$ を T の像, $\mathrm{rank}(T)=\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$ を T の階数といふ.

★ 以下 V は vector 空間, $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ は V の基, T は V の線形変換であるとする.
★ A は n 次正方行列とする.

(10) $\varphi_A(t)=|tI-A|$ を A の固有多項式と称する.

(11) $A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$ （あるいは $T(\boldsymbol{u})=\lambda\boldsymbol{u}$）となる scalar λ と $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$ が存在するとき, それぞれを A の（あるいは T の）固有値, 固有値 λ に対する固有 vector と称する.

(12) $W(\lambda,A)=\{\boldsymbol{u}\in\mathbf{K}^n\,|\,A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}\}(\subset\mathbf{K}^n)$ を λ に対する A の固有空間と称する.

(13) $W(\lambda,T)=\{\boldsymbol{u}\in V\,|\,T(\boldsymbol{u})=\lambda\boldsymbol{u}\}(\subset V)$ を λ に対する T の固有空間と称する.

(14) λ が A の固有値であるためには $\varphi_A(\lambda)=0$ であることが必要十分.

(15) Vector 空間 V の線形変換 T, 及び, V の適当な基に関する表現行列 A に対し $\varphi_T(t)=\varphi_A(t)$ と定め, これを T の固有多項式と呼ぶ. $\varphi_T(t)$ は V の基の選び方に依存しない.

(16) Cayley-Hamilton の定理 : $\varphi_A(A)=O$, $\varphi_T(T)=O$.

(17) ある正則行列 P が存在して $B=P^{-1}AP$ となるとき, A と B は相似であるといはれる.

(18) 正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき, A は P により対角化されるといふ. またこのとき, A は対角化可能であるといはれる. T の表現行列 A が対角化可能であるとき, T は対角化可能であるといはれる.

(19) 行列 $A\in\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ について, A が対角化可能 $\Longleftrightarrow \sum_\lambda \dim W(\lambda,A)=n$.
但し, 和は A の固有値 λ のすべてに渡る.

(20) $\mathbb{C}$ 上の線形変換 T について, T が対角化可能 $\Longleftrightarrow \sum_\lambda \dim W(\lambda,T)=\dim V$.
但し, 和は T の固有値 λ のすべてに渡る.