実施 : 2023 年 7 月 4 日 (火) 14:50-16:20, R4-101 室

2023 年度 **前 期 中 間 試 験** (問題 兼 解答用紙)

| 開講学部 | 評点小計 |
| --- | --- |
| 理工学部 | |

| 評 点 |
| --- |
| |

| 問題枚数 | 両面印刷 | 別紙解答用紙 | 試験時間 | 試 験 科 目 名 | 出 題 者 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 / 4 p | 有 | なし | 80 分 | 線 形 代 数 3 火曜 4 時限, 教科書 : Original | 大 西 良 博 |

| 持込許可物件 | 所属学部 | 所属学科 | 学年 | クラス | 学 籍 番 号 (9 桁) | 氏 名 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| なし | 理工学部 | 学科 | 年 | | | |

**注意** 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
**注意** 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
**注意** 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする.
**注意** 4. 時間の許す限り検算をせよ.
**注意** 5. **6a** と **6b** は選択問題である. どちらか 1 問選んで解答せよ.

**1** (15 点) 線形写像 $T\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$, $T(\boldsymbol{x}) = A\,\boldsymbol{x}$, 但し

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 4 & 3 & 2 & -1 \\ -5 & 15 & 2 & 3 & -5 & 9 \\ -3 & 9 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

について, 次を求めよ.

(1) $\mathrm{Ker}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{null}(T)$.

(2) $\mathrm{Im}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{rank}(T)$.

**2** (15 点) $x$ は不定元とする. $\mathbb{R}[x]_3$ の元

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 - 2x - 5x^2 - 3x^3, \\ f_2(x) &= -3 + 6x + 15x^2 + 9x^3, \\ f_3(x) &= -3 + 4x + 2x^2 + x^3, \\ f_4(x) &= -2 + 3x + 3x^2 + 3x^3, \\ f_5(x) &= -2 + 2x - 5x^2 + 2x^3, \\ f_6(x) &= 2 - x + 9x^2 + 7x^3 \end{aligned}$$

について, これらの vectors がなす組の中で 1 次独立な最大個数 $r$ を求めよ. また $r$ 個の 1 次独立な組を, 前の方を優先して選び出し, 他の vectors をそれらの 1 次結合で表せ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ (15 点) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ について答へよ.

(1) $A$ の固有多項式 $\varphi_A(t)$ を求めよ.

(2) $f(t) = t^5 - 2t^4 - 7t^3 + t^2 + 5t + 2$ を $\varphi_A(t)$ で割つたときの余りを求めよ.

(3) $f(A)$ を求めよ.

**学籍番号**

$\boxed{\mathbf{4}}$ (15 点) 線形変換 $T : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$,

$T(f(x)) = f''(x)\,x(x-1) - 2\,f(0)(x-2)(x+1) + f(1-x)$,

について, 次の 3 つを求めよ.

(1) $\mathbb{R}[x]_2$ の標準基 $\{1,\ x,\ x^2\}$ に関する表現行列 $A$,

(2) $(1 + x - x^2,\ x - x^2,\ 2 - x^2) = (1,\ x,\ x^2)\,P$ を満たす行列 $P$.

(3) 基 $\{1 + x - x^2,\ x - x^2,\ 2 - x^2\}$ に関する $T$ の表現行列 $B$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ (15 点) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 4 & -4 & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{C})$ について答へよ.

(1) $A$ の固有多項式 $\varphi_A(t)$ を求めよ.

(2) $A$ は（$\mathbb{C}$ 上で）対角化可能か. 不可能な場合は理由を述べ, 可能である場合は対角化せよ.

（ $B = P^{-1}AP$ が対角行列となる様な $P \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$ を見い出せ. ）

(3) $A^n$ を, その各成分を $n$ の式で表して記せ.

**学籍番号**

$\boxed{\mathbf{6a}}$ (10 点) 次の問に答へよ.

(1) $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ について

$$\varphi_{A^{-1}}(t) = |A|^{-1}(-t)^n \varphi_A(1/t)$$

であることを示せ.

(2) $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の固有値を $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ とする. このとき, $M^{-1}$ の固有値は

$${\alpha_1}^{-1}, \ \cdots, \ {\alpha_n}^{-1}$$

であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{6b}}$ (10 点) $T$ を $V$ の線形変換とする. $T$ が直交変換であるためには $\|T(\boldsymbol{u})\| = \|\boldsymbol{u}\|$ が全ての $\boldsymbol{u} \in V$ について成り立つことが必要十分であることを示せ.

学籍番号

$\boxed{\mathbf{7}}$ (15 点) $\mathbb{R}^4$ 内の 3 つの vectors

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 19 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -13 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

の生成する部分空間の正規直交基を 1 組求めよ. ( Hint : Gram-Schmidt の正規直交化法 )

## 記　号

$\mathbb{N}$ … 自然数全体, $\mathbb{Z}$ … 整数全体のなす環, $\mathbb{Q}$ … 有理数全体のなす体,
$\mathbb{R}$ … 実数全体のなす体, $\mathbb{C}$ … 複素数全体のなす体, $\mathbf{K}$ … 一般の体, $I$ … 単位行列,
$\mathrm{Mat}(m,n,\mathbf{K})$ … $m\times n$ 行列, $\mathrm{Mat}(n,\mathbf{K})$ … $n$ 次正方行列, $\mathrm{GL}(n,\mathbf{K})$ … $n$ 次正則行列.

## 既習事項のまとめ

(1) 行列の主成分とは, 各行における 0 でない最も左にある成分のことである. 従つて主成分が存在しない行もあり得る（つまり 0 ばかりからなる行）.
(2) 簡約行列とは“右下りの優しい階段状”の行列であつて, 主成分がすべて 1 で, 主成分のある列は主成分以外はすべて 0 である様なもののこと.
(3) どんな行列も基本変形（掃き出し法）により簡約行列に変形（簡約化）でき, 結果は一意的である. それにより, 連立 1 次方程式を解くことができる.
(4) Vector 空間 $V$ の部分集合 $X$ について, その中に $r$ 個の vectors からなる 1 次独立な組があり, しかも $X$ のどんな $r{+}1$ 個の vectors も 1 次従属であるとき, $r$ を $X$ の最大 1 次独立数と呼ぶ.
(5) Vector 空間 $V$ の最大 1 次独立数を与へる集合 $B$ を $V$ の基または基底といふ. $r$ を $V$ の次元と呼んで $\dim(V)$ または $\dim V$ と記す.
(6) $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 $U$ から $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 $V$ への写像 $T$ は, 任意の $c\in\mathbf{K}$ と任意の $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2\in U$ に対し **L1** $T(c\boldsymbol{u}_1)=cT(\boldsymbol{u}_1)$; **L2** $T(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2)=T(\boldsymbol{u}_1)+T(\boldsymbol{u}_2)$ が成り立つとき, 線形写像と呼ばれる.
(7) Vector 空間 $V$ からそれ自身への線形写像を線形変換といふ.
(8) $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 $U$ の基 $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ と vector 空間 $V$ の基 $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m\}$, および線形写像 $T:U\to V$ が与へられたとき, $\big(T(\boldsymbol{u}_1),\cdots,T(\boldsymbol{u}_n)\big)=(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m)A$ なる $A\in\mathrm{Mat}(m,n,\mathbf{K})$ を $T$ のこれらの基に関する表現行列と呼ぶ.
(9) 線形写像 $T:U\to V$ について
$\mathrm{Ker}(T)=\{\,\boldsymbol{u}\in U\,|\,T(\boldsymbol{u})=\mathbf{0}_V\,\}$ を $T$ の核, $\mathrm{null}(T)=\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$ を $T$ の退化次数,
$\mathrm{Im}(T)=\{\,T(\boldsymbol{u})\,|\,\boldsymbol{u}\in U\,\}$ を $T$ の像, $\mathrm{rank}(T)=\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$ を $T$ の階数といふ.
★ 以下 $V$ は vector 空間, $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ は $V$ の基, $T$ は $V$ の線形変換であるとする.
★ $A$ は $n$ 次正方行列とする.
(10) $\varphi_A(t)=|tI-A|$ を $A$ の固有多項式と称する.
(11) $A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$（あるいは $T(\boldsymbol{u})=\lambda\boldsymbol{u}$）となる scalar $\lambda$ と $\boldsymbol{u}\neq\mathbf{0}$ が存在するとき, それぞれを $A$ の（あるいは $T$ の）固有値, 固有値 $\lambda$ に対する固有 vector と称する.
(12) $W(\lambda,A)=\{\boldsymbol{u}\in\mathbf{K}^n\,|\,A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}\}(\subset\mathbf{K}^n)$ を $\lambda$ に対する $A$ の固有空間と称する.
(13) $W(\lambda,T)=\{\boldsymbol{u}\in V\,|\,T(\boldsymbol{u})=\lambda\boldsymbol{u}\}(\subset V)$ を $\lambda$ に対する $T$ の固有空間と称する.
(14) $\lambda$ が $A$ の固有値であるためには $\varphi_A(\lambda)=0$ であることが必要十分.
(15) Vector 空間 $V$ の線形変換 $T$, 及び, $V$ の適当な基に関する表現行列 $A$ に対し $\varphi_T(t)=\varphi_A(t)$ と定め, これを $T$ の固有多項式と呼ぶ. $\varphi_T(t)$ は $V$ の基の選び方に依存しない.
(16) Cayley-Hamilton の定理 : $\varphi_A(A)=O$, $\varphi_T(T)=O$.
(17) ある正則行列 $P$ が存在して $B=P^{-1}AP$ となるとき, $A$ と $B$ は相似であるといはれる.
(18) 正則行列 $P$ が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき, $A$ は $P$ により対角化されるといふ. またこのとき, $A$ は対角化可能であるといはれる. $T$ の表現行列 $A$ が対角化可能であるとき, $T$ は対角化可能であるといはれる.
(19) 行列 $A\in\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ について, $A$ が対角化可能 $\Longleftrightarrow \displaystyle\sum_{\lambda:\,A\text{ の固有値}}\dim W(\lambda,A)=n$.
但し, 和は $A$ の固有値 $\lambda$ のすべてに渡る.
(20) $\mathbb{C}$ 上の線形変換 $T$ について, $T$ が対角化可能 $\Longleftrightarrow \displaystyle\sum_{\lambda:\,A\text{ の固有値}}\dim W(\lambda,A)=\dim V$.
但し, 和は $T$ の固有値 $\lambda$ のすべてに渡る.
(21) 任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}\in V$ に対し $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\in\mathbb{R}$ が定められてゐて, 第 1 変数についても第 2 変数についても線形性を持ち, さらに任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ について $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$ が成り立ち, $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=0 \iff \boldsymbol{u}=\mathbf{0}$ を満たすとき, $V$ には内積 $(\ ,\ )$ が定められてゐるといひ, その様な $V$ を内積空間と称する.
(22) 内積空間 $V$ においては $\|\boldsymbol{u}\|=\sqrt{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}$ なる記法を用いる. これは $\boldsymbol{u}$ の norm と呼ばれる.
(23) 内積空間において $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0$ となる vectors $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は直交するといはれ $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$ と記される.
(24) 実正方行列 $P$ は ${}^tPP=I$ を満たすとき, 直交行列と呼ばれる. これは $P{}^tP=I$ と同値である.
(25) 任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}\in V$ に対して $(T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v}))=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ となるとき $T$ は直交変換であるといはれる.
(26) $T$ が直交変換であることと $T$ の表現行列が直交行列であることは同値.
(27) 実正方行列 $P$ が直交行列であるためには, $A$ の列 vectors の長さが全て 1 でかつ互ひに直交することが必要十分である.