実施：2024 年 7 月 30 日 (火) 14:50-16:20, E-204 室

2024 年度 **前期 定期試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評 点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
2 / 4 p	有	なし	80 分	線形代数 3　火曜 4 時限, 教科書：Original	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする.
注意 4. 時間の許す限り検算をせよ.
注意 5. **6a** と **6b** は選択問題である. どちらか 1 問選んで解答せよ.

1 (15 点) $\mathbb{R}$ 上の線形写像 $T\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$, $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, 但し

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & -2 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & 5 & 7 \\ 2 & -5 & -8 & -3 & 1 & 7 \end{bmatrix},$$

について, 次を求めよ.
(1) A の簡約化 B.
(2) $\mathrm{Ker}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{null}(T)$.
(3) $\mathrm{Im}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{rank}(T)$.

2 (15 点) x は不定元とする. $\mathbb{R}[x]_3$ の元

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -3 - x + 2x^3, \\ f_2(x) &= 1 + 2x - 3x^2 - 5x^3, \\ f_3(x) &= -1 + 3x - 6x^2 - 8x^3, \\ f_4(x) &= -2 + 2x - x^2 - 3x^3, \\ f_5(x) &= 5 + x + 5x^2 + x^3, \\ f_6(x) &= -4 - x + 7x^2 + 7x^3 \end{aligned}$$

について, これらの vectors がなす組の中で 1 次独立な最大個数 r を求めよ. また r 個の 1 次独立な組を, 前の方を優先して選び出し, 他の vectors をそれらの 1 次結合で表せ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ (15 点) $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ について答へよ.

(1) A の固有多項式 $\varphi_A(t)$ を求めよ.

(2) $f(t) = t^6 - 3t^5 + 9t^3 - 5t - 6$ を $\varphi_A(t)$ で割つたときの余りを求めよ.

(3) $f(A)$ を求めよ.

学籍番号

$\boxed{\mathbf{4}}$ (15 点) 線形変換 $T : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$,

$$T(f(x)) = f''(x)x - f'(x+1)(x-2) - f'(2x) + (x^2-4)f(1)$$

について, 次の 3 つを求めよ.

(1) $\mathbb{R}[x]_2$ の標準基 $\{1,\ x,\ x^2\}$ に関する表現行列 A,

(2) $(1-x,\ x^2,\ 3-x^2) = (1,\ x,\ x^2)P$ を満たす行列 P.

(3) 基 $\{1-x,\ x^2,\ 3-x^2\}$ に関する T の表現行列 B.

学籍番号

$\boxed{\mathbf{5}}$ (15 点) $A=\begin{bmatrix} -1 & -8 & 8 \\ 4 & 11 & -8 \\ 4 & 8 & -5 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,\mathbb{C})$ について答へよ.

(1) A の固有多項式 $\varphi_A(t)$ を求めよ.

(2) A は（$\mathbb{C}$ 上で）対角化可能か. 不可能な場合は理由を述べ, 可能である場合は対角化せよ.

（ $B=P^{-1}AP$ が対角行列となる様な $P\in \mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$ を見い出せ. ）

(3) A^n を, その各成分を n の式で表して記せ.

$\boxed{\mathbf{6}}$ (10 点) 次の問に答へよ.

(直交行列の全体が積に関して群をなすことの証明)

(1) A, B が直交行列のとき, AB も直交行列であることを示せ.

(2) A が直交行列のとき, A は正則で A^{-1} も直交行列であることを示せ.

学籍番号

$\boxed{\textbf{7a}}$ (15 点) $\mathbb{R}^4$ 内の 3 つの vectors

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -13 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

に対し, この順で Gram-Schmidt の正規直交化法を行ふことにより, これらの vectors の生成する部分空間の正規直交基を 1 組与へよ.

$\boxed{\textbf{7b}}$ (15 点) 次の問に答へよ.

(1) 正則行列 A について $\varphi_{A^{-1}}(t) = |A|^{-1}(-t)^n \varphi_A(1/t)$ であることを示せ.

(2) 直交行列 A について $|A| = -1$ ならば -1 は A の固有値であることを証明せよ.

(Hint : 行列式が -1 であるいくつかの直交行列の固有多項式を挙げておく. $t^3 - \frac{3}{7}t^2 - \frac{3}{7}t + 1$, $t^4 + \frac{4}{9}t^3 - \frac{4}{9}t - 1$, $t^5 - \frac{3}{5}t^4 - \frac{2}{5}t^3 - \frac{2}{5}t^2 - \frac{3}{5}t + 1$.)

記　号

$\mathbb{N}$ ⋯ 自然数全体, $\mathbb{Z}$ ⋯ 整数全体のなす環, $\mathbb{Q}$ ⋯ 有理数全体のなす体,
$\mathbb{R}$ ⋯ 実数全体のなす体, $\mathbb{C}$ ⋯ 複素数全体のなす体, $\mathbf{K}$ ⋯ 一般の体, I ⋯ 単位行列,
$\mathrm{Mat}(m,n,\mathbf{K})$ ⋯ $m\times n$ 行列, $\mathrm{Mat}(n,\mathbf{K})$ ⋯ n 次正方行列, $\mathrm{GL}(n,\mathbf{K})$ ⋯ n 次正則行列.

既習事項のまとめ

(1) 行列の<u>主成分</u>とは, 各行における 0 でない最も左にある成分のことである. 從つて主成分が存在しない行もあり得る（つまり 0 ばかりからなる行）.

(2) <u>簡約行列</u>とは“右下りの優しい階段状”の行列であつて, 主成分がすべて 1 で, 主成分のある列は主成分以外はすべて 0 である様なもののこと.

(3) どんな行列も基本変形（掃き出し法）により簡約行列に変形（<u>簡約化</u>）でき, 結果は一意的である. それにより, 連立 1 次方程式を解くことができる.

(4) Vector 空間 V の部分集合 X について, その中に r 個の vectors からなる 1 次独立な組があり, しかも X のどんな $r{+}1$ 個の vectors も 1 次従属であるとき, r を X の<u>最大 1 次独立数</u>と呼ぶ.

(5) Vector 空間 V の最大 1 次独立数を与へる集合 B を V の<u>基</u>または<u>基底</u>といふ. r を V の<u>次元</u>と呼んで $\dim(V)$ または $\dim V$ と記す.

(6) $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 U から $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 V への写像 T は, 任意の $c\in\mathbf{K}$ と任意の $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\in U$ に対し **L1** $T(c\boldsymbol{u}_1)=cT(\boldsymbol{u}_1)$; **L2** $T(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2)=T(\boldsymbol{u}_1)+T(\boldsymbol{u}_2)$ が成り立つとき, <u>線形写像</u>と呼ばれる.

(7) Vector 空間 V からそれ自身への線形写像を<u>線形変換</u>といふ.

(8) $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 U の基 $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ と vector 空間 V の基 $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m\}$, および線形写像 $T: U\to V$ が与へられたとき, $\big(T(\boldsymbol{u}_1),\cdots,T(\boldsymbol{u}_n)\big)=(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m)A$ なる $A\in\mathrm{Mat}(m,n,\mathbf{K})$ を T のこれらの基に関する<u>表現行列</u>と呼ぶ.

(9) 線形写像 $T: U\to V$ について
$\mathrm{Ker}(T)=\{\,\boldsymbol{u}\in U\,|\,T(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0}_V\,\}$ を T の<u>核</u>, $\mathrm{null}(T)=\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$ を T の<u>退化次数</u>,
$\mathrm{Im}(T)=\{\,T(\boldsymbol{u})\,|\,\boldsymbol{u}\in U\,\}$ を T の<u>像</u>, $\mathrm{rank}(T)=\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$ を T の<u>階数</u>といふ.

★ 以下 V は vector 空間, $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ は V の基, T は V の線形変換であるとする.

★ A は n 次正方行列とする.

(10) $\varphi_A(t)=|tI-A|$ を A の<u>固有多項式</u>と称する.

(11) $A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$ （あるいは $T(\boldsymbol{u})=\lambda\boldsymbol{u}$）となる scalar λ と $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$ が存在するとき, それぞれを A の（あるいは T の）固有値, 固有値 λ に対する<u>固有 vector</u> と称する.

(12) $W(\lambda,A)=\{\boldsymbol{u}\in\mathbf{K}^n\,|\,A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}\}(\subset\mathbf{K}^n)$ を λ に対する A の<u>固有空間</u>と称する.

(13) $W(\lambda,T)=\{\boldsymbol{u}\in V\,|\,T(\boldsymbol{u})=\lambda\boldsymbol{u}\}(\subset V)$ を λ に対する T の<u>固有空間</u>と称する.

(14) λ が A の固有値であるためには $\varphi_A(\lambda)=0$ であることが必要十分.

(15) Vector 空間 V の線形変換 T, 及び, V の適当な基に関する表現行列 A に対し $\varphi_T(t)=\varphi_A(t)$ と定め, これを T の固有多項式と呼ぶ. $\varphi_T(t)$ は V の基の選び方に依存しない.

(16) Cayley-Hamilton の定理：$\varphi_A(A)=O$, $\varphi_T(T)=O$.

(17) ある正則行列 P が存在して $B=P^{-1}AP$ となるとき, A と B は<u>相似</u>であるといはれる.

(18) 正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき, A は P により<u>対角化</u>されるといふ. またこのとき, A は<u>対角化可能</u>であるといはれる. T の表現行列 A が対角化可能であるとき, T は<u>対角化可能</u>であるといはれる.

(19) 行列 $A\in\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ について, A が対角化可能 $\iff \displaystyle\sum_{\lambda:\,A\text{ の固有値}}\dim W(\lambda,A)=n$.
但し, 和は A の固有値 λ のすべてに渡る.

(20) $\mathbb{C}$ 上の線形変換 T について, T が対角化可能 $\iff \displaystyle\sum_{\lambda:\,A\text{ の固有値}}\dim W(\lambda,A)=\dim V$.
但し, 和は T の固有値 λ のすべてに渡る.

(21) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\in V$ に対し $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\in\mathbb{R}$ が定められてゐて, 第 1 変数についても第 2 変数についても線形性を持ち, さらに任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ について $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$ が成り立ち, $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=0\iff\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ を満たすとき, V には内積 $(\ ,\ )$ が定められてゐるといひ, その様な V を<u>内積空間</u>と称する.

(22) 内積空間 V においては $\|\boldsymbol{u}\|=\sqrt{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}$ なる記法を用いる. これは $\boldsymbol{u}$ の <u>norm</u> と呼ばれる.

(23) 内積空間において $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0$ となる vectors $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ は直交するといはれ $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$ と記される.

(24) 実正方行列 P は ${}^tPP=I$ を満たすとき, <u>直交行列</u>と呼ばれる. これは $P\,{}^tP=I$ と同値である.

(25) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\in V$ に対して $(T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v}))=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ となるとき T は<u>直交変換</u>であるといはれる.

(26) T が直交変換であることと T の表現行列が直交行列であることは同値.

(27) 実正方行列 P が直交行列であるためには, A の列 vectors の長さが全て 1 でかつ互ひに直交することが必要十分である.