

2024年度 前期 定期試験 (問題兼解答用紙)

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名			出題者
2/4p	有	なし	80分	線形代数3 火曜4時限, 教科書: Original			大西良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9桁)	氏名	
なし	理工学部	学科	年				

開講学部	評点小計
理工学部	

評点

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと。最終結果だけでは得点できない。
 注意 2. 学生証、記名用のペン、鉛筆またはシャープペンシル、消しゴム以外は机の上に置かないこと。
 注意 3. 試験場の静粛を保つために、退場は開始 60 分後の時点の一回限りとする。

注意 4. 時間の許す限り検算をせよ。

注意 5. **6a** と **6b** は選択問題である。どちらか 1 問選んで解答せよ。

1 (15 点) \mathbb{R} 上の線形写像 $T: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, 但し

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & -2 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & 5 & 7 \\ 2 & -5 & -8 & -3 & 1 & 7 \end{bmatrix},$$

について、次を求めよ。

- A の簡約化 B .
- $\text{Ker}(T)$ の 1 組の基と $\text{null}(T)$.
- $\text{Im}(T)$ の 1 組の基と $\text{rank}(T)$.

略解. (1) A の簡約行列は

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) よつて

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

で $\text{null}(T) = 3$.

(3)

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

で $\text{rank}(T) = 3$.

2 (15 点) x は不定元とする. $\mathbb{R}[x]_3$ の元

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -3 - x + 2x^3, \\ f_2(x) &= 1 + 2x - 3x^2 - 5x^3, \\ f_3(x) &= -1 + 3x - 6x^2 - 8x^3, \\ f_4(x) &= -2 + 2x - x^2 - 3x^3, \\ f_5(x) &= 5 + x + 5x^2 + x^3, \\ f_6(x) &= -4 - x + 7x^2 + 7x^3 \end{aligned}$$

について、これらの vectors がなす組の中で 1 次独立な最大個数 r を求めよ。また r 個の 1 次独立な組を、前の方を優先して選び出し、他の vectors をそれらの 1 次結合で表せ。

略解. 問題 **1** の行列に関して

$$A = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6],$$

$$B = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5 \ b_6]$$

と書くとき、簡約化の可逆性により、 a_1, \dots, a_6 の間の 1 次関係は b_1, \dots, b_6 の間の 1 次関係と一致する。

一方、**1** の A を使つて

$$(f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x), f_6(x)) = (1, x, x^2, x^3)A.$$

ゆゑ、 a_1, \dots, a_6 の間の 1 次関係は f_1, \dots, f_6 の間の 1 次関係と一致する。

しかるに **1**(1) の結果から

$$b_1, b_2, b_3$$

は 1 次独立であつて

$$b_2 = b_1 + 2b_3,$$

$$b_5 = -3b_1 - 2b_2 + b_4,$$

$$b_6 = -b_1 - 3b_2 + 2b_4.$$

これらのことから、 $r = 3$ であつて

$$f_1(x), f_2(x), f_4(x).$$

が最大独立個数を与える vectors である。また、残りの vectors はこれらでもつて

$$f_3(x) = f_1(x) + 2f_2(x),$$

$$f_5(x) = -3f_1(x) - 2f_2(x) + f_4(x),$$

$$f_6(x) = -f_1(x) - 3f_2(x) + 2f_4(x)$$

と表される。

3 (15点) $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ について答へよ.

- (1) A の固有多項式 $\varphi_A(t)$ を求めよ.
- (2) $f(t) = t^6 - 3t^5 + 9t^3 - 5t - 6$ を $\varphi_A(t)$ で割ったときの余りを求めよ.
- (3) $f(A)$ を求めよ.

略解

$$\varphi_A(t) = t^3 - 4t^2 + 5t + 1$$

$$f(t) = (t^3 + t^2 - t - 1)\varphi_A(t) + (t - 5)$$

$$f(A) = A - 5I = \begin{bmatrix} -3 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

4 (15点) 線形変換 $T: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$,

$T(f(x)) = f''(x)x - f'(x+1)(x-2) - f'(2x) + (x^2-4)f(1)$ について、次の3つを求めよ.

- (1) $\mathbb{R}[x]_2$ の標準基 $\{1, x, x^2\}$ に関する表現行列 A ,
- (2) $(1-x, x^2, 3-x^2) = (1, x, x^2)P$ を満たす行列 P .
- (3) 基 $\{1-x, x^2, 3-x^2\}$ に関する T の表現行列 B .

略解 (1)

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(2)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(3)

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

5 (15点) $A = \begin{bmatrix} -1 & -8 & 8 \\ 4 & 11 & -8 \\ 4 & 8 & -5 \end{bmatrix} \in \text{Mat}(3, \mathbb{C})$ について答へよ.

- (1) A の固有多項式 $\varphi_A(t)$ を求めよ.
- (2) A は $(\mathbb{C}$ 上で) 対角化可能か. 不可能な場合は理由を述べ, 可能である場合は対角化せよ.
($B = P^{-1}AP$ が対角行列となる様な $P \in \text{GL}(3, \mathbb{C})$ を見い出せ.)
- (3) A^n を, その各成分を n の式で表して記せ.

略例解 (1)

$$\varphi_A(t) = (t-3)^2(t+1).$$

(2)

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

によつて

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

と対角化される.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

(3)

$$A = PBP^{-1}$$

であるから

$$A^n = PB^nP^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)^n & -2 \times 3^n + 2 \times (-1)^n & 2 \times 3^n - 2 \times (-1)^n \\ 3^n - (-1)^n & 3 \times 3^n - 2 \times (-1)^n & -2 \times 3^n + 2 \times (-1)^n \\ 3^n - (-1)^n & 2 \times 3^n - 2 \times (-1)^n & -3^n + 2 \times (-1)^n \end{bmatrix}.$$

6 (10点) 次の間に答へよ.

(直交行列の全体が積に関して群をなすことの証明)

- (1) A, B が直交行列のとき, AB も直交行列であることを示せ.
- (2) A が直交行列のとき, A は正則で A^{-1} も直交行列であることを示せ.

略解 6 (1)

7a (15 点) \mathbb{R}^4 内の 3 つの vectors

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -13 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

に対し、この順で Gram-Schmidt の正規直交化法を行ふことにより、これらの vectors の生成する部分空間の正規直交基を 1 組与へよ。

7b (15 点) 次の問に答へよ。

(1) 正則行列 A について $\varphi_{A^{-1}}(t) = |A|^{-1}(-t)^n \varphi_A(1/t)$ であることを示せ。

(2) 直交行列 A について $|A| = -1$ ならば -1 は A の固有値であることを証明せよ。

(Hint: 行列式が -1 であるいくつかの直交行列の固有多項式を挙げておく。 $t^3 - \frac{3}{7}t^2 - \frac{3}{7}t + 1$, $t^4 + \frac{4}{9}t^3 - \frac{4}{9}t - 1$, $t^5 - \frac{3}{5}t^4 - \frac{2}{5}t^3 - \frac{2}{5}t^2 - \frac{3}{5}t + 1$.)

略解

7a

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

7b (1) 次の様に示される:

$$\begin{aligned} \varphi_{A^{-1}}(t) &= |tI - A^{-1}| = |tA - I||A^{-1}| = t^n |A - t^{-1}I||A^{-1}| \\ &= (-1)^n t^n |t^{-1}I - A||A^{-1}| = (-t)^n \varphi_A(t^{-1})|A^{-1}|. \end{aligned}$$

(2) A が直交行列であるから、

$$(\clubsuit) \quad \varphi_A(t) = \varphi_{tA}(t) = \varphi_{A^{-1}}(t)$$

なので、もし $|A| = 1$ であれば (1) より、

$$\varphi_A(t) = \varphi_{tA}(t) = (-1)^{n+1} t^n \varphi_{A^{-1}}(t^{-1}) = (-1)^{n+1} t^n \varphi_A(t^{-1}).$$

ここで $t = -1$ とすると n の偶奇によらず

$$\varphi_A(-1) = -\varphi_A(-1)$$

となる。よつて

$$\varphi_A(-1) = 0$$

でなければならない。これは -1 が固有値であることを示してゐる。

【参考】上の式 (\clubsuit) は $\varphi_A(t)$ の係数を降冪順に並べたものと、昇冪順に並べたものは n が奇数であれば一致し、 n が偶数ならば符号のみ全て逆転してゐることを示してゐる。

$n = 2m$ ならば

$$\varphi_A(t) = t^{2m} + a_1 t^{2m-1} + a_2 t^{2m-2} + \cdots + a_{m-1} t^{m+1} - a_{m-1} t^{m-1} - \cdots - a_2 t - a_1 t - 1,$$

$n = 2m+1$ ならば

$$\varphi_A(t) = t^{2m+1} + a_1 t^{2m-1} + a_2 t^{2m-2} + \cdots + a_m t^{m+2} + a_{m+1} t^{m+1} + a_{m+1} t^m + a_m t^{m-1} + \cdots + a_2 t + a_1 t + 1.$$

ゆゑに $t = -1$ を代入すると中央から“等距離”にある 2 項ごとに cancel が起り、

$$\varphi_A(-1) = 0$$

であることがわかる。

記号

\mathbb{N} … 自然数全体, \mathbb{Z} … 整数全体のなす環, \mathbb{Q} … 有理数全体のなす体,
 \mathbb{R} … 実数全体のなす体, \mathbb{C} … 複素数全体のなす体, \mathbf{K} … 一般の体, I … 単位行列,
 $\text{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ … $m \times n$ 行列, $\text{Mat}(n, \mathbf{K})$ … n 次正交代行列, $\text{GL}(n, \mathbf{K})$ … n 次正則行列.

既習事項のまとめ

- (1) 行列の主成分とは、各行における 0 でない最も左にある成分のことである。従って主成分が存在しない行もあり得る（つまり 0 ばかりからなる行）。
- (2) 簡約行列とは“右下りの優しい階段状”の行列であつて、主成分がすべて 1 で、主成分のある列は主成分以外はすべて 0 である様なものこと。
- (3) どんな行列も基本変形（掃き出し法）により簡約行列に変形（簡約化）でき、結果は一意的である。それにより、連立 1 次方程式を解くことができる。
- (4) Vector 空間 V の部分集合 X について、その中に r 個の vectors からなる 1 次独立な組があり、しかも X のどんな $r+1$ 個の vectors も 1 次従属であるとき、 r を X の 最大 1 次独立数 と呼ぶ。
- (5) Vector 空間 V の最大 1 次独立数を与へる集合 B を V の基または基底といふ。 r を V の次元と呼んで $\dim(V)$ または $\dim V$ と記す。
- (6) \mathbf{K} 上の vector 空間 U から \mathbf{K} 上の vector 空間 V への写像 T は、任意の $c \in \mathbf{K}$ と任意の $u_1, u_2 \in U$ に対し **L1** $T(cu_1) = cT(u_1)$; **L2** $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$ が成り立つとき、線形写像と呼ばれる。
- (7) Vector 空間 V からそれ自身への線形写像を線形変換といふ。
- (8) \mathbf{K} 上の vector 空間 U の基 $\{u_1, \dots, u_n\}$ と vector 空間 V の基 $\{v_1, \dots, v_m\}$ 、および線形写像 $T : U \rightarrow V$ が与へられたとき、 $(T(u_1), \dots, T(u_n)) = (v_1, \dots, v_m)A$ なる $A \in \text{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ を T のこれらの基に関する表現行列と呼ぶ。
- (9) 線形写像 $T : U \rightarrow V$ について
 $\text{Ker}(T) = \{u \in U \mid T(u) = 0_V\}$ を T の核, $\text{null}(T) = \dim(\text{Ker}(T))$ を T の退化次数,
 $\text{Im}(T) = \{T(u) \mid u \in U\}$ を T の像, $\text{rank}(T) = \dim(\text{Im}(T))$ を T の階数といふ。

★ 以下 V は vector 空間, $\{u_1, \dots, u_n\}$ は V の基, T は V の線形変換であるとする。

★ A は n 次正交代とする。

- (10) $\varphi_A(t) = |I - A|$ を A の固有多項式と称する。
- (11) $Au = \lambda u$ (あるいは $T(u) = \lambda u$) となる scalar λ と $u \neq 0$ が存在するとき、それぞれを A の (あるいは T の) 固有値, 固有値 λ に対する固有 vector と称する。
- (12) $W(\lambda, A) = \{u \in \mathbf{K}^n \mid Au = \lambda u\} (\subset \mathbf{K}^n)$ を λ に対する A の固有空間と称する。
- (13) $W(\lambda, T) = \{u \in V \mid T(u) = \lambda u\} (\subset V)$ を λ に対する T の固有空間と称する。
- (14) λ が A の固有値であるためには $\varphi_A(\lambda) = 0$ であることが必要十分。
- (15) Vector 空間 V の線形変換 T 、及び、 V の適当な基に関する表現行列 A に対し $\varphi_T(t) = \varphi_A(t)$ と定め、これを T の固有多項式と呼ぶ。 $\varphi_T(t)$ は V の基の選び方に依存しない。
- (16) Cayley-Hamilton の定理 : $\varphi_A(A) = O$, $\varphi_T(T) = O$ 。
- (17) ある正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ となるとき、 A と B は相似であるといはれる。
- (18) 正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき、 A は P により対角化されるといふ。またこのとき、 A は対角化可能であるといはれる。 T の表現行列 A が対角化可能であるとき、 T は対角化可能であるといはれる。
- (19) 行列 $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{C})$ について、 A が対角化可能 $\iff \sum_{\lambda: A \text{ の固有値}} \dim W(\lambda, A) = n$ 。
 但し、和は A の固有値 λ のすべてに渡る。
- (20) \mathbb{C} 上の線形変換 T について、 T が対角化可能 $\iff \sum_{\lambda: A \text{ の固有値}} \dim W(\lambda, A) = \dim V$ 。
 但し、和は T の固有値 λ のすべてに渡る。
- (21) 任意の $u, v \in V$ に対し $(u, v) \in \mathbb{R}$ が定められてゐて、第 1 変数についても第 2 変数についても線形性を持ち、さらに任意の u, v について $(u, v) = (v, u)$ が成り立ち、 $(u, u) = 0 \iff u = 0$ を満たすとき、 V には内積 () が定められてゐるといひ、その様な V を内積空間と称する。
- (22) 内積空間 V においては $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ なる記法を用いる。これは u の norm と呼ばれる。
- (23) 内積空間において $(u, v) = 0$ となる vectors u, v は直交するといはれ $u \perp v$ と記される。
- (24) 実正交代行列 P は ${}^t P P = I$ を満たすとき、直交代行列と呼ばれる。これは $P {}^t P = I$ と同値である。
- (25) 任意の $u, v \in V$ に対して $(T(u), T(v)) = (u, v)$ となるとき T は直交変換であるといはれる。
- (26) T が直交変換であることと T の表現行列が直交代行列であることは同値。
- (27) 実正交代行列 P が直交代行列であるためには、 A の列 vectors の長さが全て 1 でかつ互ひに直交することが必要十分である。