実施：2024 年 7 月 9 日 (火) 14:50-16:20, 12-301 室

2024 年度　**前期　中間試験**　(問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評　点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
2 / 4 p	有	なし	80 分	線 形 代 数 3　火曜 4 時限, 教科書：Original	大 西 良 博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学 籍 番 号 (9 桁)	氏　名
なし	理工学部	学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする.
注意 4. 時間の許す限り検算をせよ.
注意 5. **7a** と **7b** は選択問題である. どちらか 1 問選んで解答せよ.

1 (15 点) $\mathbb{R}$ 上の線形写像 $T\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$, $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, 但し

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -5 & 0 & 8 & 5 \\ -1 & 3 & 8 & 7 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & -15 & -5 & -2 & 5 \end{bmatrix},$$

について, 次を求めよ.
(1) A の簡約化 B.
(2) $\mathrm{Ker}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{null}(T)$.
(3) $\mathrm{Im}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{rank}(T)$.

略解. (1) A の簡約行列は

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) よつて $\mathrm{Ker}(T)$ の 1 組の基として

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

がとれて, $\mathrm{null}(T) = 3$.
(3) $\mathrm{Im}(T)$ の 1 組の基として

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

がとれて $\mathrm{rank}(T) = 3$.

2 (15 点) x は不定元とする. $\mathbb{R}[x]_3$ の元

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -2 - x + 3x^3, \\ f_2(x) &= -1 + 3x + 2x^2 - 6x^3, \\ f_3(x) &= -5 + 8x + 6x^2 - 15x^3, \\ f_4(x) &= 7x + 3x^2 - 5x^3, \\ f_5(x) &= 8 + 4x - x^2 - 2x^3, \\ f_6(x) &= 5 + 6x + 5x^3 \end{aligned}$$

について, これらの vectors がなす組の最大 1 次独立数 r を求めよ. また r 個の 1 次独立な組を, 前の方を優先して選び出し, 他の vectors をそれらの 1 次結合で表せ.

略解. 問題 **1** の行列に関して

$$A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_5\ \boldsymbol{a}_6],$$
$$B = [\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3\ \boldsymbol{b}_4\ \boldsymbol{b}_5\ \boldsymbol{b}_6]$$

と書くとき, 簡約化の可逆性により, $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_6$ の間の 1 次関係は $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_6$ の間の 1 次関係と一致する.
一方, **1** の A を使つて

$$\bigl(f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x), f_6(x)\bigr) = (1, x, x^2, x^3)A.$$

ゆゑ, $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_6$ の間の 1 次関係は $f_1, \cdots, f_6$ の間の 1 次関係と一致する.
しかるに **1**(1) の結果から

$$\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_4$$

は 1 次独立であつて

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_3 &= \boldsymbol{b}_1 + 3\boldsymbol{b}_2, \\ \boldsymbol{b}_5 &= -3\boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_4, \\ \boldsymbol{b}_6 &= -\boldsymbol{b}_1 - 3\boldsymbol{b}_2 + 2\boldsymbol{b}_4. \end{aligned}$$

これらのことから, $r = 3$ であつて

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad f_4(x).$$

が最大 1 次独立数を与へる vectors である. また, 残りの vectors はこれらでもつて

$$\begin{aligned} f_3(x) &= f_1(x) + 3f_2(x), \\ f_5(x) &= -3f_1(x) - 2f_2(x) + f_4(x), \\ f_6(x) &= -f_1(x) - 3f_2(x) + 2f_4(x) \end{aligned}$$

と表される.

$\boxed{\mathbf{3}}$ (15 点) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ について答へよ.

(1) A の固有多項式 $\varphi_A(t)$ を求めよ.

(2) $f(t) = t^6 - 7t^4 - t^3 - 4t + 3$ を $\varphi_A(t)$ で割つたときの余りを求めよ.

(3) $f(A)$ を求めよ.

略解 (1)

$$\varphi_A(t) = t^3 + 2t^2 - 2t - 1.$$

(2)

$$f(t) = (t^3 - 2t^2 - t - 2)\,\varphi_A(t) - 9t + 1.$$

(3)

$$f(A) = -9A + I = \begin{bmatrix} 10 & -9 & -9 \\ -18 & 28 & -18 \\ -27 & 36 & -17 \end{bmatrix}.$$

学籍番号

$\boxed{\mathbf{4}}$ (15 点) 線形変換 $T : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$,

$$T(f(x)) = f''(x)x - f'(x-2)(x-1) + f'(1-x) + f(2)x$$

について, 次の 3 つを求めよ.

(1) $\mathbb{R}[x]_2$ の標準基 $\{1,\ x,\ x^2\}$ に関する表現行列 A.

(2) $(-2+x,\ 1+x,\ 3-3x+2x^2) = (1,\ x,\ x^2)\,P$ を満たす行列 P.

(3) 基 $\{-2+x,\ 1+x,\ 3-3x+2x^2\}$ に関する T の表現行列 B.

略解 (1)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(2)

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(3)

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{5}$ (15 点) $A=\begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,\mathbb{C})$ について答へよ.

(1) A の固有多項式 $\varphi_A(t)$ を求めよ.

(2) A は（$\mathbb{C}$ 上で）対角化可能か. 不可能な場合は理由を述べ, 可能である場合は対角化せよ.

($B=P^{-1}AP$ が対角行列となる様な $P\in \mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$ を見い出せ.)

(3) A^n を, その各成分を n の式で表して記せ.

略例解 (1)

$$\varphi_A(t)=(t-2)^2(t-1).$$

(2) 固有空間は

$$W(2,A)=\mathbb{C}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+\mathbb{C}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\mathbb{C}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}+\mathbb{C}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$W(1,A)=\mathbb{C}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

これらの次元の和が 3 なので対角化可能.

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

によつて

$$B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

と対角化される. ただし,

$$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -8 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

(3)

$$A=PBP^{-1}$$

であるから

$$A^n=PB^nP^{-1}=\begin{bmatrix} 5\cdot 2^n-4 & -2\cdot 2^n+2 & -3\cdot 2^n+3 \\ 4\cdot 2^n-4 & -2^n+2 & -3\cdot 2^n+3 \\ 4\cdot 2^n-4 & -2\cdot 2^n+2 & -2\cdot 2^n+3 \end{bmatrix}.$$

学籍番号

$\boxed{6}$ (10 点) T を V の線形変換とする. T が直交変換であるためには $\|T(\boldsymbol{u})\|=\|\boldsymbol{u}\|$ が全ての $\boldsymbol{u}\in V$ について成り立つことが必要十分であることを示せ.

略解 $\boxed{6}$ $T:V\to V$ が直交変換, つまり任意の $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$ に対して $(T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v}))=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ であれば, 特に $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$ として $\|T(\boldsymbol{u})\|^2=\|\boldsymbol{u}\|^2$ を得る. $\|T(\boldsymbol{u})\|\geqq 0$, $\|\boldsymbol{u}\|\geqq 0$ であるから, $\|T(\boldsymbol{u})\|=\|\boldsymbol{u}\|$ を得る.

逆に, 任意の $\boldsymbol{u}\in V$ について $\|T(\boldsymbol{u})\|=\|\boldsymbol{u}\|$ であれば, $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ にとることで

$$\|T(\boldsymbol{u})\|^2+2(T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v}))+\|T(\boldsymbol{v})\|^2=\|\boldsymbol{u}\|^2+2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+\|\boldsymbol{v}\|^2,$$

$$\|T(\boldsymbol{u})\|^2=\|\boldsymbol{u}\|^2,$$

$$\|T(\boldsymbol{v})\|^2=\|\boldsymbol{v}\|^2$$

のそれぞれを得る. よつて $2(T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v}))=2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ が得られ,

$$\big(T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v})\big)=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$$

である. ゆゑに T は直交変換である.

学籍番号

$\boxed{\textbf{7a}}$ (15 点) $\mathbb{R}^4$ 内の 3 つの vectors

$$\begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 14 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -15 \\ 15 \\ -8 \end{bmatrix}$$

に対し, この順で Gram-Schmidt の正規直交化法を行ふことにより, これらの vectors の生成する部分空間の正規直交基を 1 組与へよ.

$\boxed{\textbf{7b}}$ (15 点) 次の問に答へよ.
(1) 正則行列 A について $\varphi_{A^{-1}}(t) = |A|^{-1}(-t)^n \varphi_A(1/t)$ であることを示せ.
(2) 直交行列 A について $|A| = -1$ ならば -1 は A の固有値であることを証明せよ.
(Hint : 行列式が -1 であるいくつかの直交行列の固有多項式を挙げておく. $t^3 - \frac{3}{7}t^2 - \frac{3}{7}t + 1$, $t^4 + \frac{4}{9}t^3 - \frac{4}{9}t - 1$, $t^5 - \frac{3}{5}t^4 - \frac{2}{5}t^3 - \frac{2}{5}t^2 - \frac{3}{5}t + 1$.)

略解

$\boxed{\textbf{7a}}$

$$\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{7b}}$ (1) 次の様に示される :

$$\begin{aligned} \varphi_{A^{-1}}(t) &= |tI - A^{-1}| = |tA - I||A^{-1}| = t^n|A - t^{-1}I||A^{-1}| \\ &= (-1)^n t^n |t^{-1}I - A||A^{-1}| = (-t)^n \varphi_A(t^{-1})|A^{-1}|. \end{aligned}$$

(2) A が直交行列であるから,

$$(\clubsuit) \qquad \varphi_A(t) = \varphi_{{}^tA}(t) = \varphi_{A^{-1}}(t)$$

なので, もし $|A| = 1$ であれば (1) より,

$$\varphi_A(t) = \varphi_{{}^tA}(t) = (-1)^{n+1}\, t^n\, \varphi_{A^{-1}}(t^{-1}) = (-1)^{n+1}\, t^n\, \varphi_A(t^{-1}).$$

ここで $t = -1$ とすると n の偶奇によらず

$$\varphi_A(-1) = -\varphi_A(-1)$$

となる. よつて

$$\varphi_A(-1) = 0$$

でなければならない. これは -1 が固有値であることを示してゐる.

【参考】上の式 $(\clubsuit)$ は $\varphi_A(t)$ の係数を降冪順に並べたものと, 昇冪順に並べたものは n が奇数であれば一致し, n が偶数ならば符号のみ全て逆転してゐることを示してゐる.

$n = 2m$ ならば

$$\varphi_A(t) = t^{2m} + a_1 t^{2m-1} + a_2 t^{2m-2} + \cdots + a_{m-1}t^{m+1} - a_{m-1}t^{m-1} - \cdots - a_2 t - a_1 t - 1,$$

$n = 2m+1$ ならば

$$\varphi_A(t) = t^{2m+1} + a_1 t^{2m-1} + a_2 t^{2m-2} + \cdots + a_m t^{m+2} + a_{m+1}t^{m+1} + a_{m+1}t^m + a_m t^{m-1} + \cdots + a_2 t + a_1 t + 1.$$

ゆゑに $t = -1$ を代入すると中央から “ 等距離 ” にある 2 項ごとに cancel が起り,

$$\varphi_A(-1) = 0$$

であることがわかる.

記　号

$\mathbb{N}$ ⋯ 自然数全体, $\mathbb{Z}$ ⋯ 整数全体のなす環, $\mathbb{Q}$ ⋯ 有理数全体のなす体,
$\mathbb{R}$ ⋯ 実数全体のなす体, $\mathbb{C}$ ⋯ 複素数全体のなす体, $\mathbf{K}$ ⋯ 一般の体, I ⋯ 単位行列,
$\mathrm{Mat}(m,n,\mathbf{K})$ ⋯ $m \times n$ 行列, $\mathrm{Mat}(n,\mathbf{K})$ ⋯ n 次正方行列, $\mathrm{GL}(n,\mathbf{K})$ ⋯ n 次正則行列.

既習事項のまとめ

(1) 行列の<u>主成分</u>とは, 各行における 0 でない最も左にある成分のことである. 従つて主成分が存在しない行もあり得る（つまり 0 ばかりからなる行）.
(2) <u>簡約行列</u>とは“右下りの優しい階段状”の行列であつて, 主成分がすべて 1 で, 主成分のある列は主成分以外はすべて 0 である様なもののこと.
(3) どんな行列も基本変形（掃き出し法）により簡約行列に変形（<u>簡約化</u>）でき, 結果は一意的である. それにより, 連立 1 次方程式を解くことができる.
(4) Vector 空間 V の部分集合 X について, その中に r 個の vectors からなる 1 次独立な組があり, しかも X のどんな $r+1$ 個の vectors も 1 次従属であるとき, r を X の<u>最大 1 次独立数</u>と呼ぶ.
(5) Vector 空間 V の最大 1 次独立数を与へる集合 B を V の<u>基</u>または<u>基底</u>といふ. r を V の<u>次元</u>と呼んで $\dim(V)$ または $\dim V$ と記す.
(6) $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 U から $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 V への写像 T は, 任意の $c \in \mathbf{K}$ と任意の $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$ に対し **L1** $T(c\boldsymbol{u}_1) = cT(\boldsymbol{u}_1)$; **L2** $T(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = T(\boldsymbol{u}_1) + T(\boldsymbol{u}_2)$ が成り立つとき, <u>線形写像</u>と呼ばれる.
(7) Vector 空間 V からそれ自身への線形写像を<u>線形変換</u>といふ.
(8) $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 U の基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ と vector 空間 V の基 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$, および線形写像 $T: U \to V$ が与へられたとき, $\big(T(\boldsymbol{u}_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}_n)\big) = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m)A$ なる $A \in \mathrm{Mat}(m,n,\mathbf{K})$ を T のこれらの基に関する<u>表現行列</u>と呼ぶ.
(9) 線形写像 $T: U \to V$ について
$\mathrm{Ker}(T) = \{\boldsymbol{u} \in U \mid T(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_V\}$ を T の<u>核</u>, $\mathrm{null}(T) = \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$ を T の<u>退化次数</u>,
$\mathrm{Im}(T) = \{T(\boldsymbol{u}) \mid \boldsymbol{u} \in U\}$ を T の<u>像</u>, $\mathrm{rank}(T) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$ を T の<u>階数</u>といふ.

★ 以下 V は vector 空間, $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ は V の基, T は V の線形変換であるとする.
★ A は n 次正方行列とする.

(10) $\varphi_A(t) = |tI - A|$ を A の<u>固有多項式</u>と称する.
(11) $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$（あるいは $T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$）となる scalar λ と $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ が存在するとき, それぞれを A の（あるいは T の）固有値, 固有値 λ に対する<u>固有 vector</u> と称する.
(12) $W(\lambda, A) = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{K}^n \mid A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}\} (\subset \mathbf{K}^n)$ を λ に対する A の<u>固有空間</u>と称する.
(13) $W(\lambda, T) = \{\boldsymbol{u} \in V \mid T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}\} (\subset V)$ を λ に対する T の<u>固有空間</u>と称する.
(14) λ が A の固有値であるためには $\varphi_A(\lambda) = 0$ であることが必要十分.
(15) Vector 空間 V の線形変換 T, 及び, V の適当な基に関する表現行列 A に対し $\varphi_T(t) = \varphi_A(t)$ と定め, これを T の固有多項式と呼ぶ. $\varphi_T(t)$ は V の基の選び方に依存しない.
(16) Cayley-Hamilton の定理：$\varphi_A(A) = O$, $\varphi_T(T) = O$.
(17) ある正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ となるとき, A と B は<u>相似</u>であるといはれる.
(18) 正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき, A は P により<u>対角化</u>されるといふ. またこのとき, A は<u>対角化可能</u>であるといはれる. T の表現行列 A が対角化可能であるとき, T は<u>対角化可能</u>であるといはれる.
(19) 行列 $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ について, A が対角化可能 $\iff \displaystyle\sum_{\lambda:\, A\ \text{の固有値}} \dim W(\lambda, A) = n$.
但し, 和は A の固有値 λ のすべてに渡る.
(20) $\mathbb{C}$ 上の線形変換 T について, T が対角化可能 $\iff \displaystyle\sum_{\lambda:\, A\ \text{の固有値}} \dim W(\lambda, A) = \dim V$.
但し, 和は T の固有値 λ のすべてに渡る.
(21) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}$ が定められてゐて, 第 1 変数についても第 2 変数についても線形性を持ち, さらに任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ について $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$ が成り立ち, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0 \iff \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ を満たすとき, V には内積 $(\ ,\ )$ が定められてゐるといひ, その様な V を<u>内積空間</u>と称する.
(22) 内積空間 V においては $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}$ なる記法を用いる. これは $\boldsymbol{u}$ の <u>norm</u> と呼ばれる.
(23) 内積空間において $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ となる vectors $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ は直交するといはれ $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ と記される.
(24) 実正方行列 P は ${}^tPP = I$ を満たすとき, <u>直交行列</u>と呼ばれる. これは $P\,{}^tP = I$ と同値である.
(25) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対して $(T(\boldsymbol{u}), T(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ となるとき T は<u>直交変換</u>であるといはれる.
(26) T が直交変換であることと T の表現行列が直交行列であることは同値.
(27) 実正方行列 P が直交行列であるためには, A の列 vectors の長さが全て 1 でかつ互ひに直交することが必要十分である.