

2025 年度 前期 定期試験 (問題兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名			出題者
2/4p	有	なし	80分	線形代数 3 <small>火曜 4 時限, 教科書: Original</small>			大西 良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9桁)	氏名	
なし	理工学部	学科	年				

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと。最終結果だけでは得点できない。
 注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと。
 注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする。

注意 4. 時間の許す限り検算をせよ。

注意 5. **7a** と **7b** は選択問題である。どちらか 1 問選んで解答せよ。

1 (15 点) \mathbb{R} 上の線形写像 $T: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, 但し

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -9 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 2 & -6 & 4 & -6 & 4 & 2 \\ -4 & 12 & -5 & 6 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

について, 次を求めよ。

- (1) A の簡約化 B .
- (2) $\text{Ker}(T)$ の 1 組の基と $\text{null}(T)$.
- (3) $\text{Im}(T)$ の 1 組の基と $\text{rank}(T)$.

2 (15 点) x は不定元とする。 $\mathbb{R}[x]_3$ の元

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 3 + 2x - 4x^2 - x^3, \\ f_2(x) &= -9 - 6x + 12x^2 + 3x^3, \\ f_3(x) &= 1 + 4x - 5x^2 + 2x^3, \\ f_4(x) &= -2 - 6x + 6x^2 - 5x^3, \\ f_5(x) &= -4 + 4x - 2x^2 + 6x^3, \\ f_6(x) &= 4 + 2x - x^2 + 3x^3 \end{aligned}$$

について, これらの vectors がなす組の最大 1 次独立数 r を求めよ。また r 個の 1 次独立な組を, 前の方を優先して選び出し, 他の vectors をそれらの 1 次結合で表せ。 (**1** の結果を用いてよい。)

3 (10点) 正方行列 A が与へられ, その固有多項式が

$$\varphi_A(t) = t^3 - t^2 + t - 1$$

であるとせよ. このとき, $A^{2025} + A^{1007}$ を整数係数の A の 2 次以下の多項式で表せ. (Hint: $\varphi_A(t)$ に何かを掛けると...)

学籍番号

4 (15点) 線形変換 $T: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$,

$$T(f(x)) = f''(x)x + 3f'(x)(x-1) - f(x-1) - xf(2)$$

について, 次の 3 つを求めよ.

- (1) $\mathbb{R}[x]_2$ の標準基 $\{1, x, x^2\}$ に関する表現行列 A .
- (2) $(2+x, -1+x, -1-2x^2) = (1, x, x^2)P$ を満たす行列 P .
- (3) 基 $\{2+x, -1+x, 1-2x^2\}$ に関する T の表現行列 B .

5 (15点) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \text{Mat}(3, \mathbb{C})$ について答へよ.

- (1) A の固有多項式 $\varphi_A(t)$ を求めよ.
- (2) A は $(\mathbb{C}$ 上で) 対角化可能か. 不可能な場合は理由を述べ, 可能である場合は対角化せよ.
($B = P^{-1}AP$ が対角行列となる様な $P \in \text{GL}(3, \mathbb{C})$ を見い出せ.)
- (3) A^n を, その各成分を n の式で表して記せ.

6 (15点) 内積空間 V とその部分空間 W に対し

$$W^\perp = \{ \mathbf{u} \in V \mid \text{すべての } \mathbf{v} \in W \text{ に対して } (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \}$$

と定める. これは W の直交補空間と呼ばれる. このとき

$$W \cap W^\perp = \{ \mathbf{0} \}, \quad V = W + W^\perp$$

となることを証明せよ.

7a (15 点) \mathbb{R}^4 内の 3 つの vectors

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -9 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

に対し、この順で Gram-Schmidt の正規直交化法を行ふことにより、これらの vectors の生成する部分空間の正規直交基を 1 組与へよ。さらに、それらにもう 1 本の長さ 1 の vector を求めて、それら 4 本が全空間 \mathbb{R}^4 の正規直交基となる様にせよ。

7b (15 点) 次の問に答へよ。

(1) 正則行列 A について $\varphi_{A^{-1}}(t) = |A|^{-1}(-t)^n \varphi_A(1/t)$ であることを示せ。

(2) $A \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ の固有値を重複も込めて $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ とする。

このとき、 A^{-1} の固有値は重複も込めて

$$\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1}$$

の n 個であることを示せ。

記号

\mathbb{N} … 自然数全体, \mathbb{Z} … 整数全体のなす環, \mathbb{Q} … 有理数全体のなす体,
 \mathbb{R} … 実数全体のなす体, \mathbb{C} … 複素数全体のなす体, \mathbf{K} … 一般の体, I … 単位行列,
 $\text{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ … $m \times n$ 行列, $\text{Mat}(n, \mathbf{K})$ … n 次正交代行列, $\text{GL}(n, \mathbf{K})$ … n 次正則行列.

既習事項のまとめ

- (1) 行列の主成分とは、各行における 0 でない最も左にある成分のことである。従って主成分が存在しない行もあり得る（つまり 0 ばかりからなる行）。
- (2) 簡約行列とは“右下りの優しい階段状”の行列であつて、主成分がすべて 1 で、主成分のある列は主成分以外はすべて 0 である様なものこと。
- (3) どんな行列も基本変形（掃き出し法）により簡約行列に変形（簡約化）でき、結果は一意的である。それにより、連立 1 次方程式を解くことができる。
- (4) Vector 空間 V の部分集合 X について、その中に r 個の vectors からなる 1 次独立な組があり、しかも X のどんな $r+1$ 個の vectors も 1 次従属であるとき、 r を X の 最大 1 次独立数 と呼ぶ。
- (5) Vector 空間 V の最大 1 次独立数を与へる集合 B を V の基または基底といふ。 r を V の次元と呼んで $\dim(V)$ または $\dim V$ と記す。
- (6) \mathbf{K} 上の vector 空間 U から \mathbf{K} 上の vector 空間 V への写像 T は、任意の $c \in \mathbf{K}$ と任意の $u_1, u_2 \in U$ に対し **L1** $T(cu_1) = cT(u_1)$; **L2** $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$ が成り立つとき、線形写像と呼ばれる。
- (7) Vector 空間 V からそれ自身への線形写像を線形変換といふ。
- (8) \mathbf{K} 上の vector 空間 U の基 $\{u_1, \dots, u_n\}$ と vector 空間 V の基 $\{v_1, \dots, v_m\}$ 、および線形写像 $T : U \rightarrow V$ が与へられたとき、 $(T(u_1), \dots, T(u_n)) = (v_1, \dots, v_m)A$ なる $A \in \text{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ を T のこれらの基に関する表現行列と呼ぶ。
- (9) 線形写像 $T : U \rightarrow V$ について
 $\text{Ker}(T) = \{u \in U \mid T(u) = 0_V\}$ を T の核, $\text{null}(T) = \dim(\text{Ker}(T))$ を T の退化次数,
 $\text{Im}(T) = \{T(u) \mid u \in U\}$ を T の像, $\text{rank}(T) = \dim(\text{Im}(T))$ を T の階数といふ。

★ 以下 V は vector 空間, $\{u_1, \dots, u_n\}$ は V の基, T は V の線形変換であるとする。

★ A は n 次正交代とする。

- (10) $\varphi_A(t) = |I - A|$ を A の固有多項式と称する。
- (11) $Au = \lambda u$ (あるいは $T(u) = \lambda u$) となる scalar λ と $u \neq 0$ が存在するとき、それぞれを A の (あるいは T の) 固有値, 固有値 λ に対する固有 vector と称する。
- (12) $W(\lambda, A) = \{u \in \mathbf{K}^n \mid Au = \lambda u\} (\subset \mathbf{K}^n)$ を λ に対する A の固有空間と称する。
- (13) $W(\lambda, T) = \{u \in V \mid T(u) = \lambda u\} (\subset V)$ を λ に対する T の固有空間と称する。
- (14) λ が A の固有値であるためには $\varphi_A(\lambda) = 0$ であることが必要十分。
- (15) Vector 空間 V の線形変換 T 、及び、 V の適当な基に関する表現行列 A に対し $\varphi_T(t) = \varphi_A(t)$ と定め、これを T の固有多項式と呼ぶ。 $\varphi_T(t)$ は V の基の選び方に依存しない。
- (16) Cayley-Hamilton の定理 : $\varphi_A(A) = O$, $\varphi_T(T) = O$ 。
- (17) ある正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ となるとき、 A と B は相似といはれる。
- (18) 正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき、 A は P により対角化されるといふ。またこのとき、 A は対角化可能であるといはれる。 T の表現行列 A が対角化可能であるとき、 T は対角化可能であるといはれる。
- (19) 行列 $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{C})$ について、 A が対角化可能 $\iff \sum_{\lambda: A \text{ の固有値}} \dim W(\lambda, A) = n$ 。
 但し、和は A の固有値 λ のすべてに渡る。
- (20) \mathbb{C} 上の線形変換 T について、 T が対角化可能 $\iff \sum_{\lambda: A \text{ の固有値}} \dim W(\lambda, A) = \dim V$ 。
 但し、和は T の固有値 λ のすべてに渡る。
- (21) 任意の $u, v \in V$ に対し $(u, v) \in \mathbb{R}$ が定められてゐて、第 1 変数についても第 2 変数についても線形性を持ち、さらに任意の u, v について $(u, v) = (v, u)$ が成り立ち、 $(u, u) = 0 \iff u = 0$ を満たすとき、 V には内積 () が定められてゐるといひ、その様な V を内積空間と称する。
- (22) 内積空間 V においては $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ なる記法を用いる。これは u の norm と呼ばれる。
- (23) 内積空間において $(u, v) = 0$ となる vectors u, v は直交するといはれ $u \perp v$ と記される。
- (24) 実正交代行列 P は ${}^t P P = I$ を満たすとき、直交代行列と呼ばれる。これは $P {}^t P = I$ と同値である。
- (25) 任意の $u, v \in V$ に対して $(T(u), T(v)) = (u, v)$ となるとき T は直交変換であるといはれる。
- (26) T が直交変換であることと T の表現行列が直交代行列であることは同値。
- (27) 実正交代行列 P が直交代行列であるためには、 A の列 vectors の長さが全て 1 でかつ互ひに直交することが必要十分である。