

2025 年度 前期 定期試験 (問題兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名			出題者
2/4p	有	なし	80分	線形代数3 <small>火曜4時限, 教科書: Original</small>			大西良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9桁)	氏名	
なし	理工学部	学科	年				

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと。最終結果だけでは得点できない。
 注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと。
 注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする。

注意 4. 時間の許す限り検算をせよ。
 注意 5. **7a** と **7b** は選択問題である。どちらか 1 問選んで解答せよ。

1 (15 点) \mathbb{R} 上の線形写像 $T: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, 但し

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -9 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 2 & -6 & 4 & -6 & 4 & 2 \\ -4 & 12 & -5 & 6 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

について, 次を求めよ。

- (1) A の簡約化 B .
- (2) $\text{Ker}(T)$ の 1 組の基と $\text{null}(T)$.
- (3) $\text{Im}(T)$ の 1 組の基と $\text{rank}(T)$.

略解. (1) A の簡約行列は

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) よつて $\text{Ker}(T)$ の 1 組の基として

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

がとれて, $\text{null}(T) = 3$.

(3) $\text{Im}(T)$ の 1 組の基として

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

がとれて $\text{rank}(T) = 3$.

2 (15 点) x は不定元とする. $\mathbb{R}[x]_3$ の元

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 3 + 2x - 4x^2 - x^3, \\ f_2(x) &= -9 - 6x + 12x^2 + 3x^3, \\ f_3(x) &= 1 + 4x - 5x^2 + 2x^3, \\ f_4(x) &= -2 - 6x + 6x^2 - 5x^3, \\ f_5(x) &= -4 + 4x - 2x^2 + 6x^3, \\ f_6(x) &= 4 + 2x - x^2 + 3x^3 \end{aligned}$$

について, これらの vectors がなす組の最大 1 次独立数 r を求めよ. また r 個の 1 次独立な組を, 前の方を優先して選び出し, 他の vectors をそれらの 1 次結合で表せ. (**1** の結果を用いてよい.)

略解. 問題 **1** の行列に関して

$$\begin{aligned} A &= [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6], \\ B &= [b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5 \ b_6] \end{aligned}$$

と書くとき, 簡約化の可逆性により, a_1, \dots, a_6 の間の 1 次関係は b_1, \dots, b_6 の間の 1 次関係と一致する.

一方, **1** の A を使つて

$$(f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x), f_6(x)) = (1, x, x^2, x^3)A.$$

ゆゑ, a_1, \dots, a_6 の間の 1 次関係は f_1, \dots, f_6 の間の 1 次関係と一致する.

しかるに **1**(1) の結果から

$$b_1, b_3, b_4$$

は 1 次独立であつて

$$\begin{aligned} b_2 &= -3b_1, \\ b_5 &= -2b_1 + 2b_3, \\ b_6 &= b_1 - 3b_3 - 2b_4. \end{aligned}$$

これらのことから, $r = 3$ であつて

$$f_1(x), f_3(x), f_4(x).$$

が最大 1 次独立数を与へる vectors である. また, 残りの vectors はこれらでもつて

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -3f_1(x), \\ f_5(x) &= -2f_1(x) + 2f_3(x), \\ f_6(x) &= f_1(x) - 3f_3(x) - 2f_4(x) \end{aligned}$$

と表される.

3 (10点) 正方行列 A が与へられ, その固有多項式が

$$\varphi_A(t) = t^3 - t^2 + t - 1$$

であるとせよ. このとき, $A^{2025} + A^{1007}$ を整数係数の A の 2 次以下の多項式で表せ. (Hint: $\varphi_A(t)$ に何かを掛けると...)

略解 まず,

$$\varphi_A(t)(t+1) = t^4 - 1$$

だから

$$A^4 = I$$

であることに注意する. これにより

$$\begin{aligned}
A^{2025} + A^{1003} &= A^{4 \times 506 + 1} + A^{4 \times 251 + 3} \\
&= I^{506} A + I^{251} A^3 \\
&= A + A^3 \\
&= A + (A^2 - A + I) \\
&= A^2 + I.
\end{aligned}$$

4 (15点) 線形変換 $T: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$,

$$T(f(x)) = f''(x)x + 3f'(x)(x-1) - f(x-1) - xf(2)$$

について, 次の 3 つを求めよ.

- (1) $\mathbb{R}[x]_2$ の標準基 $\{1, x, x^2\}$ に関する表現行列 A .
- (2) $(2+x, -1+x, -1-2x^2) = (1, x, x^2)P$ を満たす行列 P .
- (3) 基 $\{2+x, -1+x, 1-2x^2\}$ に関する T の表現行列 B .

略解 (1)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

(2)

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(3)

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

【注意】 実際の試験では, 上記 (3) の基の 3 つ目の vector を $1-2x^2$ として出題してしまった. この場合の (3) の答は

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & \frac{26}{3} \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

である.

5 (15点) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \text{Mat}(3, \mathbb{C})$ について答へよ.

- (1) A の固有多項式 $\varphi_A(t)$ を求めよ.
 (2) A は $(\mathbb{C}$ 上で) 対角化可能か. 不可能な場合は理由を述べ, 可能である場合は対角化せよ.
 ($B = P^{-1}AP$ が対角行列となる様な $P \in \text{GL}(3, \mathbb{C})$ を見い出せ.)
 (3) A^n を, その各成分を n の式で表して記せ.

略例解 (1)

$$\varphi_A(t) = (t-3)^2(t-1).$$

(2) 固有空間は

$$W(3, A) = \mathbb{C} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbb{C} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$W(1, A) = \mathbb{C} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

これらの次元の和が 3 なので対角化可能.

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

によつて

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と対角化される. ただし,

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3)

$$A = PBP^{-1}$$

であるから

$$A^n = PB^nP^{-1}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3^{n+1} - 1 & 2 \cdot 3^n - 2 & -3^n + 1 \\ -3^n + 1 & 2 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 2 \cdot 3^n - 2 & 3^n + 1 \end{bmatrix}.$$

6 (15点) 内積空間 V とその部分空間 W に対し

$$W^\perp = \{u \in V \mid \text{すべての } v \in W \text{ に対して } (u, v) = 0\}$$

と定める. これは W の直交補空間と呼ばれる. このとき

$$W \cap W^\perp = \{0\}, \quad V = W + W^\perp$$

となることを証明せよ.

略解 6 $u \in W \cap W^\perp$ とする. $u \in W^\perp$ だから, 任意の $v \in W$ について $(u, v) = 0$ である. この v として u をとつてもよいから $(u, u) = 0$ である. つまり $u = 0$.

次に W の正規直交基底 $\{u_1, \dots, u_m\}$ と W^\perp の正規直交基底 $\{v_1, \dots, v_r\}$ をとる. ここで $(u_i, v_j) = 0$ であることに注意せよ. 任意に $u \in V$ をとり,

$$w = u - \sum_{i=1}^m (u, u_i) u_i - \sum_{j=1}^r (u, v_j) v_j$$

とおく. このとき, 任意の u_i について, $(w, u_i) = (u, u_i) - (u, u_i) = 0$ であるから, $w \in W^\perp$ である. ゆえに $u - \sum_{i=1}^m (u, u_i) u_i = w + \sum_{j=1}^r (u, v_j) v_j$ も W^\perp の元である. つまり u は W の元 $\sum_{i=1}^m (u, u_i) u_i$ と W^\perp の元 $w + \sum_{j=1}^r (u, v_j) v_j$ の和に書けるから, $u \in W + W^\perp$ である. 従つて $V = W + W^\perp$.

【補足】上で $w \in W^\perp$ を示したと同様にして $(w, v_j) = 0$ が示される. 従つて $w \in W$ でもある. つまり $w \in W \cap W^\perp$ であり, $w = 0$ なので,

$$u = \sum_{i=1}^m (u, u_i) u_i + \sum_{j=1}^r (u, v_j) v_j$$

であることがわかる.

後半の別解 (こちらの方が要求に対して簡便である.)

W の正規直交基底 $\{u_1, \dots, u_m\}$ をとる. 任意に $u \in V$ をとり,

$$w = u - \sum_{i=1}^m (u, u_i) u_i$$

とおく. このとき, 各 $1 \leq j \leq m$ について,

$$(w, u_j) = (u, u_j) - \sum_{i=1}^m (u, u_i) (u_i, u_j) = (u, u_j) - (u, u_j) = 0$$

であるから, 任意の $v \in W$ についても $(w, v) = 0$ である. よつて $w \in W^\perp$ である. ゆえに

$$u = \sum_{i=1}^m (u, u_i) u_i + w$$

は $W + W^\perp$ の和の形である. 従つて $V = W + W^\perp$.

7a (15点) \mathbb{R}^4 内の 3 つの vectors

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -9 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

に対し、この順で Gram-Schmidt の正規直交化法を行ふことにより、これらの vectors の生成する部分空間の正規直交基を 1 組与へよ。さらに、それらにもう 1 本の長さ 1 の vector を求めて、それら 4 本が全空間 \mathbb{R}^4 の正規直交基となる様にせよ。

7b (15点) 次の問に答へよ。

(1) 正則行列 A について $\varphi_{A^{-1}}(t) = |A|^{-1}(-t)^n \varphi_A(1/t)$ であることを示せ。

(2) $A \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ の固有値を重複も込めて $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ とする。

このとき、 A^{-1} の固有値は重複も込めて

$$\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1}$$

の n 個であることを示せ。

略解

7a

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

求めたいもう 1 本の vector を \mathbf{u}_4 とおくと、 $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_3 \perp \mathbf{u}_4$ ゆえ、

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & -5 & -2 \\ 2 & -5 & 2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

これを解いて

$$\mathbf{u}_4 = c \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

長さが 1 なる vector は

$$\mathbf{u}_4 = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \cdots \text{Ans.}$$

7b (1) 次の様に示される：

$$\begin{aligned} \varphi_{A^{-1}}(t) &= |tI - A^{-1}| = |tA - I| |A^{-1}| = t^n |A - t^{-1}I| |A^{-1}| \\ &= (-1)^n t^n |t^{-1}I - A| |A^{-1}| = (-t)^n \varphi_A(t^{-1}) |A^{-1}|. \end{aligned}$$

(2) 次の様に示される：

$$\begin{aligned} \varphi_{A^{-1}}(t) &= |tI - A^{-1}| = |tA - I| |A^{-1}| = |tA - I| |A^{-1}| \\ &= t^n |A - t^{-1}I| |A^{-1}| = t^n \varphi_A(t^{-1}) |A^{-1}| \\ &= t^n \prod_{i=1}^n (t^{-1} - \alpha_i) |A^{-1}| \\ &= \prod_{i=1}^n (-\alpha_i) \cdot \prod_{i=1}^n (\alpha_i^{-1} - t) |A^{-1}| \\ &= (-1)^n |A| \cdot \prod_{i=1}^n (\alpha_i^{-1} - t) |A^{-1}| \\ &= \prod_{i=1}^n (t - \alpha_i^{-1}). \end{aligned}$$

記号

\mathbb{N} … 自然数全体, \mathbb{Z} … 整数全体のなす環, \mathbb{Q} … 有理数全体のなす体,
 \mathbb{R} … 実数全体のなす体, \mathbb{C} … 複素数全体のなす体, \mathbf{K} … 一般の体, I … 単位行列,
 $\text{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ … $m \times n$ 行列, $\text{Mat}(n, \mathbf{K})$ … n 次正交代行列, $\text{GL}(n, \mathbf{K})$ … n 次正則行列.

既習事項のまとめ

- (1) 行列の主成分とは、各行における 0 でない最も左にある成分のことである。従って主成分が存在しない行もあり得る（つまり 0 ばかりからなる行）。
- (2) 簡約行列とは“右下りの優しい階段状”の行列であつて、主成分がすべて 1 で、主成分のある列は主成分以外はすべて 0 である様なものこと。
- (3) どんな行列も基本変形（掃き出し法）により簡約行列に変形（簡約化）でき、結果は一意的である。それにより、連立 1 次方程式を解くことができる。
- (4) Vector 空間 V の部分集合 X について、その中に r 個の vectors からなる 1 次独立な組があり、しかも X のどんな $r+1$ 個の vectors も 1 次従属であるとき、 r を X の 最大 1 次独立数 と呼ぶ。
- (5) Vector 空間 V の最大 1 次独立数を与へる集合 B を V の基または基底といふ。 r を V の次元と呼んで $\dim(V)$ または $\dim V$ と記す。
- (6) \mathbf{K} 上の vector 空間 U から \mathbf{K} 上の vector 空間 V への写像 T は、任意の $c \in \mathbf{K}$ と任意の $u_1, u_2 \in U$ に対し **L1** $T(cu_1) = cT(u_1)$; **L2** $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$ が成り立つとき、線形写像と呼ばれる。
- (7) Vector 空間 V からそれ自身への線形写像を線形変換といふ。
- (8) \mathbf{K} 上の vector 空間 U の基 $\{u_1, \dots, u_n\}$ と vector 空間 V の基 $\{v_1, \dots, v_m\}$ 、および線形写像 $T : U \rightarrow V$ が与へられたとき、 $(T(u_1), \dots, T(u_n)) = (v_1, \dots, v_m)A$ なる $A \in \text{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ を T のこれらの基に関する表現行列と呼ぶ。
- (9) 線形写像 $T : U \rightarrow V$ について
 $\text{Ker}(T) = \{u \in U \mid T(u) = 0_V\}$ を T の核, $\text{null}(T) = \dim(\text{Ker}(T))$ を T の退化次数,
 $\text{Im}(T) = \{T(u) \mid u \in U\}$ を T の像, $\text{rank}(T) = \dim(\text{Im}(T))$ を T の階数といふ。

★ 以下 V は vector 空間, $\{u_1, \dots, u_n\}$ は V の基, T は V の線形変換であるとする。
 ★ A は n 次正交代とする。

- (10) $\varphi_A(t) = |I - A|$ を A の固有多項式と称する。
- (11) $Au = \lambda u$ (あるいは $T(u) = \lambda u$) となる scalar λ と $u \neq 0$ が存在するとき、それぞれを A の (あるいは T の) 固有値, 固有値 λ に対する固有 vector と称する。
- (12) $W(\lambda, A) = \{u \in \mathbf{K}^n \mid Au = \lambda u\} (\subset \mathbf{K}^n)$ を λ に対する A の固有空間と称する。
- (13) $W(\lambda, T) = \{u \in V \mid T(u) = \lambda u\} (\subset V)$ を λ に対する T の固有空間と称する。
- (14) λ が A の固有値であるためには $\varphi_A(\lambda) = 0$ であることが必要十分。
- (15) Vector 空間 V の線形変換 T 、及び、 V の適当な基に関する表現行列 A に対し $\varphi_T(t) = \varphi_A(t)$ と定め、これを T の固有多項式と呼ぶ。 $\varphi_T(t)$ は V の基の選び方に依存しない。
- (16) Cayley-Hamilton の定理 : $\varphi_A(A) = O$, $\varphi_T(T) = O$ 。
- (17) ある正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ となるとき、 A と B は相似といはれる。
- (18) 正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき、 A は P により対角化されるといふ。またこのとき、 A は対角化可能であるといはれる。 T の表現行列 A が対角化可能であるとき、 T は対角化可能であるといはれる。
- (19) 行列 $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{C})$ について、 A が対角化可能 $\iff \sum_{\lambda: A \text{ の固有値}} \dim W(\lambda, A) = n$ 。
 但し、和は A の固有値 λ のすべてに渡る。
- (20) \mathbb{C} 上の線形変換 T について、 T が対角化可能 $\iff \sum_{\lambda: A \text{ の固有値}} \dim W(\lambda, A) = \dim V$ 。
 但し、和は T の固有値 λ のすべてに渡る。
- (21) 任意の $u, v \in V$ に対し $(u, v) \in \mathbb{R}$ が定められてゐて、第 1 変数についても第 2 変数についても線形性を持ち、さらに任意の u, v について $(u, v) = (v, u)$ が成り立ち、 $(u, u) = 0 \iff u = 0$ を満たすとき、 V には内積 () が定められてゐるといひ、その様な V を内積空間と称する。
- (22) 内積空間 V においては $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ なる記法を用いる。これは u の norm と呼ばれる。
- (23) 内積空間において $(u, v) = 0$ となる vectors u, v は直交するといはれ $u \perp v$ と記される。
- (24) 実正交代行列 P は ${}^t P P = I$ を満たすとき、直交代行列と呼ばれる。これは $P {}^t P = I$ と同値である。
- (25) 任意の $u, v \in V$ に対して $(T(u), T(v)) = (u, v)$ となるとき T は直交変換であるといはれる。
- (26) T が直交変換であることと T の表現行列が直交代行列であることは同値。
- (27) 実正交代行列 P が直交代行列であるためには、 A の列 vectors の長さが全て 1 でかつ互ひに直交することが必要十分である。