実施：2025 年 7 月 8 日 (火) 14:50-16:20, 12-301 室

2025 年度　**前期　中間試験**　(問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評　点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
2 / 4 p	有	なし	80 分	線形代数 3　火曜 4 時限, 教科書：Original	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏　名
なし	理工学部	学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと．最終結果だけでは得点できない．
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと．
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする．
注意 4. 時間の許す限り検算をせよ．
注意 5. $\boxed{\textbf{7a}}$ と $\boxed{\textbf{7b}}$ は選択問題である．どちらか 1 問選んで解答せよ．

$\boxed{\textbf{1}}$ (15 点)　$\mathbb{R}$ 上の線形写像 $T\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$, $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, 但し

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & -4 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -8 & 4 & -6 & 2 \\ -4 & -5 & 7 & -2 & 6 & -7 \\ -1 & 2 & -8 & 6 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

について, 次を求めよ．

(1) A の簡約化 B.

(2) $\mathrm{Ker}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{null}(T)$.

(3) $\mathrm{Im}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{rank}(T)$.

略解．(1) A の簡約行列は

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2)　よつて $\mathrm{Ker}(T)$ の 1 組の基として

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

がとれて, $\mathrm{null}(T) = 3$.

(3) $\mathrm{Im}(T)$ の 1 組の基として

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

がとれて $\mathrm{rank}(T) = 3$.

$\boxed{\textbf{2}}$ (15 点)　x は不定元とする．$\mathbb{R}[x]_3$ の元

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 3 + 2x - 4x^2 - x^3, \\ f_2(x) &= 1 + 4x - 5x^2 + 2x^3, \\ f_3(x) &= 3 - 8x + 7x^2 - 8x^3, \\ f_4(x) &= -4 + 4x - 2x^2 + 6x^3, \\ f_5(x) &= -2 - 6x + 6x^2 - 5x^3, \\ f_6(x) &= 2 + 2x - 7x^2 - 5x^3 \end{aligned}$$

について，これらの vectors がなす組の最大 1 次独立数 r を求めよ．また r 個の 1 次独立な組を, 前の方を優先して選び出し, 他の vectors をそれらの 1 次結合で表せ．（$\boxed{\textbf{1}}$ の結果を用ゐてよい．）

略解．問題 $\boxed{\textbf{1}}$ の行列に関して

$$\begin{aligned} A &= [\,\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_5\ \boldsymbol{a}_6\,], \\ B &= [\,\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3\ \boldsymbol{b}_4\ \boldsymbol{b}_5\ \boldsymbol{b}_6\,] \end{aligned}$$

と書くとき, 簡約化の可逆性により, $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_6$ の間の 1 次関係は $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_6$ の間の 1 次関係と一致する．

一方, $\boxed{\textbf{1}}$ の A を使つて

$$\big(f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x), f_6(x)\big) = (1, x, x^2, x^3)A.$$

ゆゑ, $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_6$ の間の 1 次関係は $f_1, \cdots, f_6$ の間の 1 次関係と一致する．

しかるに $\boxed{\textbf{1}}$(1) の結果から

$$\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_5$$

は 1 次独立であつて

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_3 &= 2\boldsymbol{b}_1 - 3\boldsymbol{b}_2, \\ \boldsymbol{b}_4 &= -2\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2, \\ \boldsymbol{b}_6 &= \boldsymbol{b}_1 + 3\boldsymbol{b}_2 + 2\boldsymbol{b}_5. \end{aligned}$$

これらのことから, $r = 3$ であつて

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad f_5(x).$$

が最大 1 次独立数を与へる vectors である．また, 残りの vectors はこれらでもつて

$$\begin{aligned} f_3(x) &= 2f_1(x) - 3f_2(x), \\ f_4(x) &= -2f_1(x) + 2f_2(x), \\ f_6(x) &= f_1(x) + 3f_2(x) + 2f_5(x) \end{aligned}$$

と表される．

3 (15 点) 正方行列 A が与へられ, その固有多項式が
$$\varphi_A(t) = (t-1)^2(t+1)$$
であるとせよ. このとき, A^{2025} を整数係数の A の 2 次以下の多項式で表せ.

略解 まづ,
$$t^{2025} = \varphi_A(t)\,q(t) + at^2 + bt + c$$
とおく. これを微分して
$$2025\,t^{2024} = \varphi_A(t)\,q'(t) + \varphi_A{}'(t)\,q(t) + 2at + b.$$
一方,
$$\varphi_A(1) = \varphi_A{}'(1) = \varphi_A(-1) = 0$$
であるから,
$$\begin{cases} 1 = a + b + c, \\ 2025 = 2a + b, \\ -1 = a - b + c. \end{cases}$$
これを解いて
$$a = 1012, \quad b = 1, \quad c = -1012.$$
よつて
$$A^{2025} = 1012\,A^2 + A - 1012\,I$$

学籍番号

4 (15 点) 線形変換 $T : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$,
$$T(f(x)) = f''(x)x + 2f'(x)\,(x-1) + f(x-2) + f(2)x$$
について, 次の 3 つを求めよ.

(1) $\mathbb{R}[x]_2$ の標準基 $\{1,\ x,\ x^2\}$ に関する表現行列 A.

(2) $(1+x,\ -2+x,\ 2-x+x^2) = (1,\ x,\ x^2)\,P$ を満たす行列 P.

(3) 基 $\{1+x,\ -2+x,\ 2-x+x^2\}$ に関する T の表現行列 B.

略解 (1)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$
(2)
$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
(3)
$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

5 (15 点) $A=\begin{bmatrix} -3 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,\mathbb{C})$ について答へよ．

(1) A の固有多項式 $\varphi_A(t)$ を求めよ．

(2) A は（$\mathbb{C}$ 上で）対角化可能か．不可能な場合は理由を述べ，可能である場合は対角化せよ．

（$B=P^{-1}AP$ が対角行列となる様な $P\in \mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$ を見い出せ．）

(3) A^n を，その各成分を n の式で表して記せ．

略例解 (1)

$$\varphi_A(t)=(t+1)^2(t-3).$$

(2) 固有空間は

$$W(2,A)=\mathbb{C}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+\mathbb{C}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$W(1,A)=\mathbb{C}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

これらの次元の和が 3 なので対角化可能．

$$P=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

によつて

$$B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

と対角化される．ただし，

$$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3)

$$A=PBP^{-1}$$

であるから

$$\begin{aligned} A^n &= PB^nP^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3(-1)^n-3^n & 2(-1)^n-2\cdot 3^n & -(-1)^n+3^n \\ -(-1)^n+3^n & 2\cdot 3^n & (-1)^n-3^n \\ (-1)^n-3^n & 2(-1)^n-2\cdot 3^n & (-1)^n+3^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

学籍番号

6 (10 点) 内積空間 V とその部分空間 W に対し

$$W^{\perp}=\{\,\boldsymbol{u}\in V \mid すべての\ \boldsymbol{v}\in W\ に対して\ (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0\,\}$$

と定める．これは W の直交補空間と呼ばれる．このとき

$$W\cap W^{\perp}=\{\mathbf{0}\},\quad V=W+W^{\perp}$$

となることを証明せよ．

略解（前半）$\boldsymbol{u}\in W\cap W^{\perp}$ とする．$\boldsymbol{u}\in W^{\perp}$ だから，

$$\forall \boldsymbol{v}\in W,\quad (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0.$$

この $\boldsymbol{v}$ として $\boldsymbol{u}$ をとつてもよいから $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=0$ である．つまり

$$\boldsymbol{u}=\mathbf{0}.$$

(後半) 次に W の正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m\}$ と $W^{\perp}$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r\}$ をとる．ここで $(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{v}_j)=0$ であることに注意せよ．任意に $\boldsymbol{u}\in V$ をとり，

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}-\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_i)\,\boldsymbol{u}_i-\sum_{j=1}^{r}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_j)\,\boldsymbol{v}_j$$

とおく．このとき，任意の $\boldsymbol{u}_i$ について，$(\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}_i)=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_i)-(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_i)=0$ であるから，$\boldsymbol{w}\in W^{\perp}$ である． ゆゑに $\boldsymbol{u}-\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_i)\,\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{w}+\sum_{j=1}^{r}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_j)\,\boldsymbol{v}_j$ も $W^{\perp}$ の元である． つまり $\boldsymbol{u}$ は W の元 $\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_i)\,\boldsymbol{u}_i$ と $W^{\perp}$ の元 $\boldsymbol{w}+\sum_{j=1}^{r}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_j)\,\boldsymbol{v}_j$ の和に書けるから，$\boldsymbol{u}\in W+W^{\perp}$ である．従つて $V=W+W^{\perp}$．

【補足】上で $\boldsymbol{w}\in W^{\perp}$ を示したと同様にして $(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}_j)=0$ が示される．従つて $\boldsymbol{w}\in W$ でもある．つまり $\boldsymbol{w}\in W\cap W^{\perp}$ であり，$\boldsymbol{w}=\mathbf{0}$ なので，

$$\boldsymbol{u}=\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_i)\,\boldsymbol{u}_i+\sum_{j=1}^{r}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_j)\,\boldsymbol{v}_j$$

であることがわかる．

後半の別解（こちらの方が要求に対して簡便である．）

W の正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m\}$ をとる．任意に $\boldsymbol{u}\in V$ をとり，

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}-\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_i)\,\boldsymbol{u}_i$$

とおく．このとき，各 $1\leqq j\leqq m$ について，

$$(\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}_j)=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_j)-\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_i)(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j)=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_j)-(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_j)=0$$

であるから，任意の $\boldsymbol{v}\in W$ についても $(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})=0$ である．よつて $\boldsymbol{w}\in W^{\perp}$ である．ゆゑに

$$\boldsymbol{u}=\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_i)\,\boldsymbol{u}_i+\boldsymbol{w}$$

は $W+W^{\perp}$ の和の形である．従つて $V=W+W^{\perp}$．

学籍番号

7a (15 点) $\mathbb{R}^4$ 内の 3 つの vectors

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \\ 14 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix}$$

に対し, <u>この順で</u> Gram-Schmidt の正規直交化法を行ふことにより, これらの vectors の生成する部分空間の正規直交基を 1 組与へよ.
さらに, それらにもう 1 本の長さ 1 の vector を求めて, それら 4 本が全空間 $\mathbb{R}^4$ の正規直交基となる様にせよ.

7b (15 点) 次の問に答へよ.

(1) 正則行列 A について $\varphi_{A^{-1}}(t) = |A|^{-1}(-t)^n\varphi_A(1/t)$ であることを示せ.

(2) 直交行列 A について $|A| = -1$ ならば -1 は A の固有値であることを証明せよ.

(Hint : 行列式が -1 であるいくつかの直交行列の固有多項式を挙げておく. $t^3 - \frac{3}{7}t^2 - \frac{3}{7}t + 1,\quad t^4 + \frac{4}{9}t^3 - \frac{4}{9}t - 1,\quad t^5 - \frac{3}{5}t^4 - \frac{2}{5}t^3 - \frac{2}{5}t^2 - \frac{3}{5}t + 1.$)

略解

7a

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

求めたいもう 1 本の vector を $\boldsymbol{u}_4$ とおくと,

$$\boldsymbol{u}_1 \perp \boldsymbol{u}_4,\quad \boldsymbol{u}_2 \perp \boldsymbol{u}_4,\quad \boldsymbol{u}_3 \perp \boldsymbol{u}_4$$

ゆゑ,

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

これを解いて

$$\boldsymbol{u}_4 = c\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

長さが 1 なる vector は

$$\boldsymbol{u}_4 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdots \text{Ans.}$$

7b (1) 次の様に示される:

$$\begin{aligned}\varphi_{A^{-1}}(t) &= |tI - A^{-1}| = |tA - I||A^{-1}| = t^n|A - t^{-1}I||A^{-1}| \\ &= (-1)^n t^n |t^{-1}I - A||A^{-1}| = (-t)^n\varphi_A(t^{-1})|A^{-1}|.\end{aligned}$$

(2) A が直交行列であるから,

$$(\clubsuit)\qquad \varphi_A(t) = \varphi_{{}^tA}(t) = \varphi_{A^{-1}}(t)$$

なので, もし $|A| = -1$ であれば (1) より,

$$\varphi_A(t) = \varphi_{{}^tA}(t) = (-1)^{n+1}t^n\varphi_{A^{-1}}(t^{-1}) = (-1)^{n+1}t^n\varphi_A(t^{-1}).$$

ここで $t = -1$ とすると n の偶奇によらず

$$\varphi_A(-1) = -\varphi_A(-1)$$

となる. よつて

$$\varphi_A(-1) = 0$$

でなければならない. これは -1 が固有値であることを示してゐる.

【参考】上の式 $(\clubsuit)$ は $\varphi_A(t)$ の係数を降冪順に並べたものと, 昇冪順に並べたものは n が奇数であれば一致し, n が偶数ならば符号のみ全て逆転してゐることを示してゐる.

<u>$n = 2m$ ならば</u>

$$\begin{aligned}\varphi_A(t) &= t^{2m} + a_1t^{2m-1} + a_2t^{2m-2} + \cdots + a_{m-1}t^{m+1} \\ &\quad - a_{m-1}t^{m-1} - \cdots - a_2t - a_1t - 1,\end{aligned}$$

<u>$n = 2m+1$ ならば</u>

$$\begin{aligned}\varphi_A(t) &= t^{2m+1} + a_1t^{2m-1} + a_2t^{2m-2} + \cdots + a_mt^{m+2} + a_{m+1}t^{m+1} \\ &\quad + a_{m+1}t^m + a_mt^{m-1} + \cdots + a_2t + a_1t + 1.\end{aligned}$$

ゆゑに $t = -1$ を代入すると中央から“等距離”にある 2 項ごとに cancel が起り,

$$\varphi_A(-1) = 0$$

であることがわかる.

記　号

$\mathbb{N}$ … 自然数全体, $\mathbb{Z}$ … 整数全体のなす環, $\mathbb{Q}$ … 有理数全体のなす体,
$\mathbb{R}$ … 実数全体のなす体, $\mathbb{C}$ … 複素数全体のなす体, $\mathbf{K}$ … 一般の体, I … 単位行列,
$\mathrm{Mat}(m,n,\mathbf{K})$ … $m\times n$ 行列, $\mathrm{Mat}(n,\mathbf{K})$ … n 次正方行列, $\mathrm{GL}(n,\mathbf{K})$ … n 次正則行列.

既習事項のまとめ

(1) 行列の<u>主成分</u>とは, 各行における 0 でない最も左にある成分のことである. 従つて主成分が存在しない行もあり得る（つまり 0 ばかりからなる行）.

(2) <u>簡約行列</u>とは“右下りの優しい階段状”の行列であつて, 主成分がすべて 1 で, 主成分のある列は主成分以外はすべて 0 である様なもののこと.

(3) どんな行列も基本変形（掃き出し法）により簡約行列に変形（<u>簡約化</u>）でき, 結果は一意的である. それにより, 連立 1 次方程式を解くことができる.

(4) Vector 空間 V の部分集合 X について, その中に r 個の vectors からなる 1 次独立な組があり, しかも X のどんな $r+1$ 個の vectors も 1 次従属であるとき, r を X の<u>最大 1 次独立数</u>と呼ぶ.

(5) Vector 空間 V の最大 1 次独立数を与へる集合 B を V の<u>基</u>または<u>基底</u>といふ. r を V の<u>次元</u>と呼んで $\dim(V)$ または $\dim V$ と記す.

(6) $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 U から $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 V への写像 T は, 任意の $c\in\mathbf{K}$ と任意の $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\in U$ に対し **L1** $T(c\boldsymbol{u}_1)=cT(\boldsymbol{u}_1)$; **L2** $T(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2)=T(\boldsymbol{u}_1)+T(\boldsymbol{u}_2)$ が成り立つとき, <u>線形写像</u>と呼ばれる.

(7) Vector 空間 V からそれ自身への線形写像を<u>線形変換</u>といふ.

(8) $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 U の基 $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ と vector 空間 V の基 $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m\}$, および線形写像 $T: U\to V$ が与へられたとき, $\big(T(\boldsymbol{u}_1),\cdots,T(\boldsymbol{u}_n)\big)=(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m)A$ なる $A\in\mathrm{Mat}(m,n,\mathbf{K})$ を T のこれらの基に関する<u>表現行列</u>と呼ぶ.

(9) 線形写像 $T: U\to V$ について
$\mathrm{Ker}(T)=\{\boldsymbol{u}\in U\,|\,T(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0}_V\}$ を T の<u>核</u>, $\mathrm{null}(T)=\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$ を T の<u>退化次数</u>,
$\mathrm{Im}(T)=\{T(\boldsymbol{u})\,|\,\boldsymbol{u}\in U\}$ を T の<u>像</u>, $\mathrm{rank}(T)=\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$ を T の<u>階数</u>といふ.

★ 以下 V は vector 空間, $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ は V の基, T は V の線形変換であるとする.

★ A は n 次正方行列とする.

(10) $\varphi_A(t)=|tI-A|$ を A の<u>固有多項式</u>と称する.

(11) $A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$（あるいは $T(\boldsymbol{u})=\lambda\boldsymbol{u}$）となる scalar λ と $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$ が存在するとき, それぞれを A の（あるいは T の）固有値, 固有値 λ に対する <u>固有 vector</u> と称する.

(12) $W(\lambda,A)=\{\boldsymbol{u}\in\mathbf{K}^n\,|\,A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}\}(\subset\mathbf{K}^n)$ を λ に対する A の<u>固有空間</u>と称する.

(13) $W(\lambda,T)=\{\boldsymbol{u}\in V\,|\,T(\boldsymbol{u})=\lambda\boldsymbol{u}\}(\subset V)$ を λ に対する T の<u>固有空間</u>と称する.

(14) λ が A の固有値であるためには $\varphi_A(\lambda)=0$ であることが必要十分.

(15) Vector 空間 V の線形変換 T, 及び, V の適当な基に関する表現行列 A に対し $\varphi_T(t)=\varphi_A(t)$ と定め, これを T の固有多項式と呼ぶ. $\varphi_T(t)$ は V の基の選び方に依存しない.

(16) Cayley-Hamilton の定理 : $\varphi_A(A)=O$, $\varphi_T(T)=O$.

(17) ある正則行列 P が存在して $B=P^{-1}AP$ となるとき, A と B は<u>相似</u>であるといはれる.

(18) 正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき, A は P により<u>対角化</u>されるといふ. またこのとき, A は<u>対角化可能</u>であるといはれる. T の表現行列 A が対角化可能であるとき, T は<u>対角化可能</u>であるといはれる.

(19) 行列 $A\in\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ について, A が対角化可能 $\iff \displaystyle\sum_{\lambda:\,A\text{ の固有値}}\dim W(\lambda,A)=n$.
但し, 和は A の固有値 λ のすべてに渡る.

(20) $\mathbb{C}$ 上の線形変換 T について, T が対角化可能 $\iff \displaystyle\sum_{\lambda:\,A\text{ の固有値}}\dim W(\lambda,A)=\dim V$.
但し, 和は T の固有値 λ のすべてに渡る.

(21) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\in V$ に対し $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\in\mathbb{R}$ が定められてゐて, 第 1 変数についても第 2 変数についても線形性を持ち, さらに任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ について $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$ が成り立ち, $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=0 \iff \boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ を満たすとき, V には内積 $(\ ,\ )$ が定められてゐるといひ, その様な V を<u>内積空間</u>と称する.

(22) 内積空間 V においては $\|\boldsymbol{u}\|=\sqrt{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}$ なる記法を用いる. これは $\boldsymbol{u}$ の <u>norm</u> と呼ばれる.

(23) 内積空間において $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0$ となる vectors $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は直交するといはれ $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$ と記される.

(24) 実正方行列 P は ${}^tPP=I$ を満たすとき, <u>直交行列</u>と呼ばれる. これは $P\,{}^tP=I$ と同値である.

(25) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\in V$ に対して $(T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v}))=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ となるとき T は<u>直交変換</u>であるといはれる.

(26) T が直交変換であることと T の表現行列が直交行列であることは同値.

(27) 実正方行列 P が直交行列であるためには, A の列 vectors の長さが全て 1 でかつ<u>互</u>ひに直交することが必要十分である.