

4 (20点) $V = \mathbb{R}^n$ とし, A を n 次冪等行列とする.

$$W_1 = \{ \mathbf{u} \in V \mid A\mathbf{u} = \mathbf{u} \}, \quad W_2 = \{ \mathbf{u} \in V \mid A\mathbf{u} = \mathbf{0} \}$$

とおくと, $W_1 = AV$, $W_2 = (I - A)V$, $V = W_1 \oplus W_2$ が成り立つ. これらを示せ.

5 (20点) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ の Jordan 標準形 B と $B = P^{-1}AP$ となる正則行列 P を 1 つ求めよ.

6 (5点) (Frobenius の定理) 行列 $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{C})$ の固有値の全体を, 重複を許して $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ とすると, 多項式 $f(t) \in \mathbb{C}[t]$ に対し, $f(A)$ の固有値は $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$ であることを示せ. (Hint: A の Jordan 標準形を考察せよ.)

記号

\mathbb{N} … 自然数全体, \mathbb{Z} … 整数全体のなす環, \mathbb{Q} … 有理数全体のなす体,
 \mathbb{R} … 実数全体のなす体, \mathbb{C} … 複素数全体のなす体.

既習事項のまとめ

★ 以下 V は vector 空間, 基 $\{u_1, \dots, u_n\}$ は V の基, 断らなければ T は V の線形変換である.
★ A, B は n 次正方行列とする.

- (1) $\varphi_A(t) = |I - A|$ を A の固有多項式と称する.
 - (2) $Au = \lambda u$ (あるいは $T(u) = \lambda u$) となる scalar λ と $u \neq 0$ が存在するとき, それぞれを A の (あるいは T の) 固有値, 固有値 λ に対する固有 vector と称する.
 - (3) $W(\lambda, A) = \{u \mid Au = \lambda u\}$ を λ に対する A の固有空間 と称する.
 - (4) $W(\lambda, T) = \{u \mid T(u) = \lambda u\}$ を λ に対する T の固有空間 と称する.
 - (5) λ が A の固有値であるためには $\varphi_A(\lambda) = 0$ であることが必要十分.
 - (6) Cayley-Hamilton の定理: $\varphi_A(A) = O, \varphi_T(T) = O$.
 - (7) Vector 空間 V 線形変換 T の V の適当な基に関する表現行列 A に対し $\varphi_T(t) = \varphi_A(t)$ と定め, これを T の固有多項式と呼ぶ. $\varphi_T(t)$ は V の基の選び方に依存しない.
 - (8) ある正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ となるとき, A と B は 相似 であるといはれる.
 - (9) 正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき, A は P により 対角化 されるといふ. またこのとき, A は 対角化可能 であるといはれる. T の表現行列 A が対角化可能であるとき, T は 対角化可能 であるといはれる.
 - (10) A が対角化可能 $\iff \sum_{\lambda} \dim W(\lambda, A) = n$. 但し, 和は A の固有値 λ のすべてに渡る.
 - (11) T が対角化可能 $\iff \sum_{\lambda} \dim W(\lambda, T) = \dim V$. 但し, 和は T の固有値 λ のすべてに渡る.
 - (12) $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{K}[t]$ と $d = d(t) = \gcd(f_1, \dots, f_r)$ に対して $d = g_1 f_1 + \dots + g_r f_r$ なる $g_1, \dots, g_r \in \mathbb{K}[t]$ が存在する. この様な g_j は $r > 2$ であつても互除法を繰り返せば求められる.
 - (13) $\mathbb{K}[t]$ の部分集合 J について $J + J \subset J$ と $J\mathbb{K}[t] \subset J$ が成り立つとき, J は $\mathbb{K}[t]$ の ideal であるといはれる.
 - (14) V の部分空間 W_1, \dots, W_s について, 任意の $v \in V$ に対し $w_i \in W_i$ (各 i) が一意的に存在して $v = w_1 + \dots + w_s$ と書けるとき, V が W_1, \dots, W_s の 直和 であるといひ, $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$ と記す.
 - (15) $f(A) = O$ (あるいは $f(T) = O$) が成り立つ $f(t) \in \mathbb{K}[t]$ のうち最小次数のものを A の (あるいは T の) 最小多項式と呼び $\mu_A(t)$ (あるいは $\mu_T(t)$) と記す.
 - (16) A が T の表現行列であれば $\mu_T(t) = \mu_A(t)$. $\mu_A(t) \mid \varphi_A(t)$. $\mu_T(t) \mid \varphi_T(t)$.
 - (17) $\mu_A(\lambda) = 0 \iff \varphi_A(\lambda) = 0$. $\mu_T(\lambda) = 0 \iff \varphi_T(\lambda) = 0$.
 - (18) $T_1 T_2 = T_2 T_1$ のとき, T_1 の各固有空間は T_2 によりそれぞれ自身に写され, T_1 と T_2 に共通の固有 vector が存在する.
 - (19) T_1 と T_2 がともに対角化可能で T_1 の各固有空間は T_2 によりそれぞれ自身に写されるならば, $T_1 T_2 = T_2 T_1$ となる.
 - (20) $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$ で各 i について, T_i が W_i の線形変換であるとせよ. 各 $v = w_1 + \dots + w_s$ (各 $w_i \in W_i$) について $T(v) = T_1(w_1) + \dots + T_s(w_s)$ と定められる線形変換 T を T_1, \dots, T_s の 直和 と称して $T = T_1 \oplus \dots \oplus T_s$ と記す.
 - (21) $A^2 = A$ であるとき A を 冪等行列 または 射影行列 と呼ぶ.
 - (22) $m \in \mathbb{N}$ が存在して $A^m = O$ となるとき A は 冪零行列 と呼ばれる.
- ★ 以下, すべての vector 空間は $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 上のものに限られる.
- (23) A の対角成分が同一の値 α で, それらの 1 つ上の成分が 1 であつて, それ以外の成分が 0 のとき, A は Jordan 細胞 であると呼ばれ $J(\alpha, n)$ と書かれる. いくつかの Jordan 細胞の直和である様な行列は Jordan 行列 と呼ばれる.
 - (24) T の (あるいは A の) 固有値 λ に対して,
 $\widetilde{W}(\lambda, T) = \{u \in V \mid (A - \lambda I)^{\ell} u = 0 \text{ となる } \ell \in \mathbb{N} \text{ が存在する.}\}$
と記して, これを T の (あるいは A の) λ に関する 準固有空間 と呼ぶ.
 - (25) λ の $\varphi_T(t) = 0$ の解としての 重複度 を m とするとき,
 $\widetilde{W}(\lambda, T) = \{u \in V \mid (A - \lambda I)^m u = 0\}$ であり $\dim \widetilde{W}(\lambda, T) = m$.
 - (26) V 基を適当に取れば T の表現行列 B は Jordan 細胞 の直和となる. 即ち, 任意の A に対し正則行列 P が存在して, $P^{-1}AP = B$ が Jordan 行列になる. この B を T の Jordan 標準形 と称する. T の Jordan 標準形はそれに並ぶ Jordan 細胞の順序を無視すれば一意的に定まる.