

2018 年度 前期 中間試験 (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名			出題者
1/1	有	なし	80分	線形代数4 <small>月曜2時限, 教科書: Original</small>			大西良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9桁)	氏名	
なし	理工学部	学科	年				

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと。最終結果だけでは得点できない。
 注意 3. 試験場の静粛を保つために、退場は開始 60 分後の時点の一回限りとする。

注意 2. 学生証、記名用のペン、鉛筆またはシャープペンシル、消しゴム以外は机の上に置かないこと。

1 (15点) 次の行列 A と B の最小多項式を求めよ (答のみでよい): $A = \begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & 3 & & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & & & \\ & 3 & & & \\ & & 5 & 1 & \\ & & & 5 & 1 \\ & & & & 5 \end{bmatrix}.$

答 $\mu_A(t) = (t+1)(t-3)^3, \mu_B(t) = (t-3)^2(t-5)^3.$

2 (20点) $A = \begin{bmatrix} -4 & -10 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -5 \\ -5 & -6 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ とする.

Vector 空間 \mathbb{C}^4 の線形変換 $T: \mathbf{u} \mapsto A\mathbf{u}$ について、次の間に答へよ。
 但し、 $\varphi_T(t) = (t-1)^2(t-2)^2$ であることは使つてよい。

- T の固有値とそのそれぞれの重複度を記せ。
- 行列 $(A-I)^2$ および $(A-2I)^2$ を求めよ。
- それぞれの固有値 λ について準固有空間 $\widetilde{W}(\lambda, T)$ を求めよ。

解答 (1) 1 と 2 でともに重複度 2.

(2)

$$(A-I)^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 & -5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(A-2I)^2 = \begin{bmatrix} 13 & 18 & -8 & -11 \\ -5 & -7 & 3 & 4 \\ -7 & -10 & 4 & 5 \\ 10 & 14 & -6 & -8 \end{bmatrix}.$$

(3) (2) で求めた $(A-I)^2$ と $(A-2I)^2$ を簡約化して解空間を求めればよい。

$$\widetilde{W}(1, T) = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{C} \right\},$$

$$\widetilde{W}(2, T) = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

3 (20点) 行列 $P = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 8 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ & -1 \end{bmatrix},$
 $A = PA_1P^{-1}, B = P(B_1^2 + 2B_1)P^{-1}$ について $AB = BA$ を示し、
 A と B の共通の固有 vectors ($\in \mathbb{C}^3$) をすべて求めよ。

解答 $A_1B_1 = B_1A_1$ は簡単に確かめられる。これより

$$A_1(B_1^2 + 2B_1) = (B_1^2 + 2B_1)A_1$$

であり、さらに

$$\begin{aligned} PA_1P^{-1}P(B_1^2 + 2B_1)P^{-1} &= PA_1(B_1^2 + 2B_1)P^{-1} \\ &= P(B_1^2 + 2B_1)A_1P^{-1} \\ &= P(B_1^2 + 2B_1)P^{-1}PA_1P^{-1} \end{aligned}$$

である。 A_1 の固有 vectors は

$$c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, c \in \mathbb{C}.$$

$$B_1^2 + 2B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ & -1 & 0 \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

の固有 vectors は

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

であるから A_1 と $B_1^2 + 2B_1$ の共通の固有 vectors は

$$c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (= c\mathbf{u} \text{ と書く}).$$

つまり

$$A_1\mathbf{u} = \mathbf{u}, (B_1^2 + 2B_1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}.$$

これより

$$PA_1P^{-1}P\mathbf{u} = P\mathbf{u}, P(B_1^2 + 2B_1)P^{-1}P\mathbf{u} = -P\mathbf{u}.$$

この推論は可逆なので、 A と B に共通の固有 vectors は $cP\mathbf{u} = c \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ に限る。

4 (20点) $V = \mathbb{R}^n$ とし, A を n 次冪等行列とする.

$$W_1 = \{u \in V \mid Au = u\}, \quad W_2 = \{u \in V \mid Au = 0\}$$

とおくと, $W_1 = AV$, $W_2 = (I - A)V$, $V = W_1 \oplus W_2$ が成り立つ. これらを示せ.

証明

(1) $u \in W_1$ ならば $u = Au \in AV$. $u \in AV$ ならば $u = Av$ ($\exists v \in V$) と書ける. ゆえに

$$W_1 \subset AV.$$

(2) $A^2 = A$ より $Au = A^2v = Av = u$ であるから, $u \in W_1$. よつて

$$W_1 \supset AV.$$

(3) 以上から $W_1 = AV$.

(4) 次に $u \in W_2$ ならば $Au = 0$ であるから $u = u - 0 = (I - A)u \in (I - A)V$ となり

$$W_2 \subset (I - A)V.$$

(5) 一方 $u \in (I - A)V$ ならば $u = (I - A)v$ ($\exists v \in V$) と書けて $Au = A(I - A)v = (A - A^2)v = (A - A)v = 0v = 0$ となるので, $u \in W_2$ がわかり,

$$W_2 \supset (I - A)V.$$

(6) ゆえに $W_2 = (I - A)V$.

(7) さらに, 任意の $v \in V$ は $v = (A + (I - A))v = Av + (I - A)v$ と書けるから, $V = W_1 + W_2$ である.

(8) また $v \in W_1 \cap W_2$ ならば $v = Av$ かつ $Av = 0$ なので $v = 0$ が結論される.

(9) よつて text の定理より $V = W_1 \oplus W_2$ である.

学籍番号

5 (20点) A を n 次冪等行列とする. n 次正則行列 P が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

となることを示せ.

(Hint: 4 の記号で W_1 と W_2 の基 (列 vectors) を別々に取り, それを並べた行列を P としたとき, $P^{-1}AP$ が上の形になることを示せば良い.)

証明 4 の W_1 と W_2 の基をそれぞれ

$$u_1, \dots, u_r \quad \text{および} \quad u_{r+1}, \dots, u_n$$

とすると

$$\begin{aligned} AP &= A[u_1 \ \dots \ u_r \ u_{r+1} \ \dots \ u_n] \\ &= [Au_1 \ \dots \ Au_r \ Au_{r+1} \ \dots \ Au_n] \\ &= [u_1 \ \dots \ u_r \ 0 \ \dots \ 0] \\ &= [u_1 \ \dots \ u_r \ u_{r+1} \ \dots \ u_n] \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \\ &= P \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

よつて $P = [u_1 \ \dots \ u_n]$ と書けば $P^{-1}AP$ が主張の形の行列になる.

6 (5点) T_1, T_2 はともに, 対角化可能な \mathbb{C} 上の vector 空間 V の線形変換であるとし, $T_1T_2 = T_2T_1$ が成り立つてみるとする. このとき V の基が存在して, その基に対する T_1 と T_2 の表現行列がどちらも対角行列になる. これを証明せよ.

(Hint: λ を T_1 の任意の固有値とせよ. $T_2(W(\lambda, T_1)) \subset W(\lambda, T_1)$ を示せ. T_2 を部分空間 $W(\lambda, T_1)$ に制限した線形変換も対角化可能である.)

証明 任意に $u \in W(\lambda, T_1)$ について

$$T_1(T_2(u)) = T_1T_2(u) = T_2(T_1(u)) = T_2(\lambda u) = \lambda(T_2(u)).$$

これは $T_2(u) \in W(\lambda, T_1)$ を示してゐる. 次元による判定法から T_2 は $W(\lambda, T_1)$ 上に制限しても対角化可能である. つまり

$$\dim W(\lambda, T_1) = d_i$$

とおくとき, $W(\lambda_i, T_1)$ の基底 $u_1^{(i)}, \dots, u_{d_i}^{(i)}$ と d_i 次対角行列 A_i が存在して

$$(T_2(u_1^{(i)}), \dots, T_2(u_{d_i}^{(i)})) = (u_1^{(i)}, \dots, u_{d_i}^{(i)})A_i$$

となる. i を 1 から r まで走らせて, それらを並べれば T_2 は $A_1 \oplus \dots \oplus A_r$ によつて表現されるが, この行列は対角行列である. 一方, この基は T_1 の固有 vectors からなるのであるから, この基に関する T_1 の表現行列ももちろん対角行列になる. 以上で主張が示された.

記号

\mathbb{N} … 自然数全体, \mathbb{Z} … 整数全体のなす環, \mathbb{Q} … 有理数全体のなす体,
 \mathbb{R} … 実数全体のなす体, \mathbb{C} … 複素数全体のなす体.

既習事項のまとめ

★ 以下 V は vector 空間, 基 $\{u_1, \dots, u_n\}$ は V の基, 断らなければ T は V の線形変換である.
★ A, B は n 次正方行列とする.

- (1) $\varphi_A(t) = |I - A|$ を A の固有多項式と称する.
 - (2) $Au = \lambda u$ (あるいは $T(u) = \lambda u$) となる scalar λ と $u \neq 0$ が存在するとき, それぞれを A の (あるいは T の) 固有値, 固有値 λ に対する固有 vector と称する.
 - (3) $W(\lambda, A) = \{u \mid Au = \lambda u\}$ を λ に対する A の固有空間 と称する.
 - (4) $W(\lambda, T) = \{u \mid T(u) = \lambda u\}$ を λ に対する T の固有空間 と称する.
 - (5) λ が A の固有値であるためには $\varphi_A(\lambda) = 0$ であることが必要十分.
 - (6) Cayley-Hamilton の定理: $\varphi_A(A) = O, \varphi_T(T) = O$.
 - (7) Vector 空間 V 線形変換 T の V の適当な基に関する表現行列 A に対し $\varphi_T(t) = \varphi_A(t)$ と定め, これを T の固有多項式と呼ぶ. $\varphi_T(t)$ は V の基の選び方に依存しない.
 - (8) ある正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ となるとき, A と B は 相似 であるといはれる.
 - (9) 正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき, A は P により 対角化 されるといふ. またこのとき, A は 対角化可能 であるといはれる. T の表現行列 A が対角化可能であるとき, T は 対角化可能 であるといはれる.
 - (10) A が対角化可能 $\iff \sum_{\lambda} \dim W(\lambda, A) = n$. 但し, 和は A の固有値 λ のすべてに渡る.
 - (11) T が対角化可能 $\iff \sum_{\lambda} \dim W(\lambda, T) = \dim V$. 但し, 和は T の固有値 λ のすべてに渡る.
 - (12) $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{K}[t]$ と $d = d(t) = \gcd(f_1, \dots, f_r)$ に対して $d = g_1 f_1 + \dots + g_r f_r$ なる $g_1, \dots, g_r \in \mathbb{K}[t]$ が存在する. この様な g_j は $r > 2$ であつても互除法を繰り返せば求められる.
 - (13) $\mathbb{K}[t]$ の部分集合 J について $J + J \subset J$ と $J\mathbb{K}[t] \subset J$ が成り立つとき, J は $\mathbb{K}[t]$ の ideal であるといはれる.
 - (14) V の部分空間 W_1, \dots, W_s について, 任意の $v \in V$ に対し $w_i \in W_i$ (各 i) が一意的に存在して $v = w_1 + \dots + w_s$ と書けるとき, V が W_1, \dots, W_s の 直和 であるといひ, $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$ と記す.
 - (15) $f(A) = O$ (あるいは $f(T) = O$) が成り立つ $f(t) \in \mathbb{K}[t]$ のうち最小次数のものを A の (あるいは T の) 最小多項式と呼び $\mu_A(t)$ (あるいは $\mu_T(t)$) と記す.
 - (16) A が T の表現行列であれば $\mu_T(t) = \mu_A(t)$. $\mu_A(t) \mid \varphi_A(t)$. $\mu_T(t) \mid \varphi_T(t)$.
 - (17) $\mu_A(\lambda) = 0 \iff \varphi_A(\lambda) = 0$. $\mu_T(\lambda) = 0 \iff \varphi_T(\lambda) = 0$.
 - (18) $T_1 T_2 = T_2 T_1$ のとき, T_1 の各固有空間は T_2 によりそれ自身に写され, T_1 と T_2 に共通の固有 vector が存在する.
 - (19) T_1 と T_2 がともに対角化可能で T_1 の各固有空間は T_2 によりそれ自身に写されるならば, $T_1 T_2 = T_2 T_1$ となる.
 - (20) $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$ で各 i について, T_i が W_i の線形変換であるとせよ. 各 $v = w_1 + \dots + w_s$ (各 $w_i \in W_i$) について $T(v) = T_1(w_1) + \dots + T_s(w_s)$ と定められる線形変換 T を T_1, \dots, T_s の 直和 と称して $T = T_1 \oplus \dots \oplus T_s$ と記す.
 - (21) $A^2 = A$ であるとき A を 冪等行列 または 射影行列 と呼ぶ.
 - (22) $m \in \mathbb{N}$ が存在して $A^m = O$ となるとき A は 冪零行列 と呼ばれる.
- ★ 以下, すべての vector 空間は $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 上のものに限られる.
- (23) A の対角成分が同一の値 α で, それらの 1 つ上の成分が 1 であつて, それ以外の成分が 0 のとき, A は Jordan 細胞 であると呼ばれ $J(\alpha, n)$ と書かれる. いくつかの Jordan 細胞の直和である様な行列は Jordan 行列 と呼ばれる.
 - (24) T の (あるいは A の) 固有値 λ に対して,
 $\widehat{W}(\lambda, T) = \{u \in V \mid (A - \lambda I)^{\ell} u = 0 \text{ となる } \ell \in \mathbb{N} \text{ が存在する.}\}$
と記して, これを T の (あるいは A の) λ に関する 準固有空間 と呼ぶ.
 - (25) λ の $\varphi_T(t) = 0$ の解としての 重複度 を m とするとき,
 $\widehat{W}(\lambda, T) = \{u \in V \mid (A - \lambda I)^m u = 0\}$ であり $\dim \widehat{W}(\lambda, T) = m$.
 - (26) V 基を適当に取れば T の表現行列 B は Jordan 細胞 の直和となる. 即ち, 任意の A に対し正則行列 P が存在して, $P^{-1}AP = B$ が Jordan 行列になる. この B を T の Jordan 標準形 と称する. T の Jordan 標準形はそれに並ぶ Jordan 細胞の順序を無視すれば一意的に定まる.