実施：2019 年 7 月 29 日 (月) 10:50-12:20, 4-203 室

2019 年度　**前期　定期試験**　(問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評　点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
1/2	有	なし	80 分	線形代数 4　月曜 2 時限, 教科書：Original	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏　名
なし	理工学部	学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする.
注意 4. **3a** と **3b** および **7a** と **7b** は選択問題である. それぞれ, どちらか 1 問選んで解答せよ.

1 (15 点) $\mathbb{R}^4$ 内の 3 つの vectors $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ の生成する部分空間の正規直交基を 1 組求めよ.
(Hint : Gram-Schmidt の直交化法)

2 (15 点) A と B が直交行列で B が正則行列のとき AB^{-1} も直交行列であることを示せ.

3a (20 点) 方程式 $4x^2 - 16xy + 4y^2 - 24x + 24y + 27 = 0$ の標準形を求め, これが表す xy 平面上の図形の概形を図示せよ.

3b (20 点) A を n 次の実対称行列とせよ. $\mathbb{R}^n$ には標準内積を入れておく. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ を A の固有値 λ, μ に対する固有 vectors とせよ. このとき $\lambda \neq \mu$ ならば $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ であることを示せ.

4 (10 点) T を内積空間 V の線形変換とする. T が直交変換であるためには T がどの vector の長さも変へないこと, 即ち $\|T(\boldsymbol{u})\| = \|\boldsymbol{u}\|$ が全ての $\boldsymbol{u} \in V$ について成り立つことが必要十分であることを示せ. 但し $\|\boldsymbol{u}\|$ は $\boldsymbol{u}$ の norm を表す.

5 (15 点) 実対称行列 $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ に対し, $B = P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を 1 つ求め, B も記せ.

学籍番号

6 (20 点) 方程式 $-3x^2 + y^2 + 2z^2 + 8xy + 4zx + 12zy = 3$ で定義される 2 次曲面の標準形を求めよ. また得られた標準形の表す曲面の概略（座標軸の名称は入れること）を図示し, その曲面の名称も記せ.

7a (5 点) 次の行列 A と B の最小多項式 $\mu_A(t), \mu_B(t)$ を求めよ (答のみでよい) : $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 5 & 1 & \\ & & & 5 & 1 \\ & & & & 5 \end{bmatrix}$.

7b (5 点) 次の問に答へよ.

(1) 正則行列 A について $\varphi_{A^{-1}}(t) = |A|^{-1}(-t)^n\varphi_A(1/t)$ であることを示せ.

(2) 直交行列 A について $|A| = -1$ ならば -1 は A の固有値であることを証明せよ.

(Hint : 行列式が -1 であるいくつかの直交行列の固有多項式を挙げておく. $t^3 - \frac{3}{7}t^2 - \frac{3}{7}t + 1$, $t^4 + \frac{4}{9}t^3 - \frac{4}{9}t - 1$, $t^5 - \frac{3}{5}t^4 - \frac{2}{5}t^3 - \frac{2}{5}t^2 - \frac{3}{5}t + 1$.)

記　号

$\mathbb{N}$ … 自然数全体, $\mathbb{Z}$ … 整数全体のなす環, $\mathbb{Q}$ … 有理数全体のなす体,
$\mathbb{R}$ … 実数全体のなす体, $\mathbb{C}$ … 複素数全体のなす体, I … 単位行列.

既習事項のまとめ

(1) 行列の 主成分 とは, 各行における 0 でない最も左にある成分のことである. 従つて主成分が存在しない行もあり得る.

(2) 簡約行列 とは “ 右下りの優しい階段状 ” の行列であつて, 主成分がすべて 1 で, 主成分のある行は主成分以外はすべて 0 であるもののこと.

(3) どんな行列も基本変形（掃き出し法）により簡約行列に変形（簡約化）でき, 結果は一意的である. それにより, 連立 1 次方程式を解くことができる.

(4) Vector 空間 V の部分集合 X について, その中に r 個の vectors からなる 1 次独立な組があり, しかも X のどんな $r{+}1$ 個の vectors も 1 次従属であるとき, r を X の 最大 1 次独立数 と呼ぶ.

(5) Vector 空間 V の最大 1 次独立数を与へる集合 B を V の 基 または 基底 といふ. r を V の 次元 と呼んで $\dim(V)$ または $\dim V$ と記す.

(6) Vector 空間 V からそれ自身への線形写像を 線形変換 といふ.

★ 以下 V は vector 空間, 基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ は V の基, T, T_1, T_2 等は $V \to$ は線形変換であるとする.
★ A, B は n 次正方行列とする.

(7) $\big(T(\boldsymbol{u}_1, \cdots, T(\boldsymbol{u}_n)\big) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\, A$ となる行列 A をこの基に関する T の 表現行列 と呼ぶ.

(8) 線形写像 $T : U \to V$ について
$\mathrm{Ker}(T) = \{\, \boldsymbol{u} \in U \,|\, T(\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}_V \,\}$ を T の 核, $\mathrm{null}(T) = \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$ を T の 退化次数,
$\mathrm{Im}(T) = \{\, T(\boldsymbol{u}) \,|\, \boldsymbol{u} \in U \,\}$ を T の 像, $\mathrm{rank}(T) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$ を T の 階数 といふ.

(9) $\varphi_A(t) = |tI - A|$ を A の固有多項式と称する.

(10) $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ （あるいは $T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$）となる scalar λ と $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ が存在するとき, それぞれを A の（あるいは T の）固有値, 固有値 λ に対する 固有 vector と称する.

(11) $W(\lambda, A) = \{\boldsymbol{u} \,|\, A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}\}$ を λ に対する A の 固有空間 と称する.

(12) $W(\lambda, T) = \{\boldsymbol{u} \,|\, T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}\}$ を λ に対する T の 固有空間 と称する.

(13) λ が A の固有値であるためには $\varphi_A(\lambda) = 0$ であることが必要十分.

(14) Cayley-Hamilton の定理 : $\varphi_A(A) = O$, $\varphi_T(T) = O$.

(15) Vector 空間 V 線形変換 T の V の適当な基に関する表現行列 A に対し $\varphi_T(t) = \varphi_A(t)$ と定め, これを T の固有多項式と呼ぶ. $\varphi_T(t)$ は V の基の選び方に依存しない.

(16) ある正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ となるとき, A と B は 相似 であるといはれる.

(17) 正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき, A は P により 対角化 されるといふ. またこのとき, A は 対角化可能 であるといはれる. T の表現行列 A が対角化可能であるとき, T は 対角化可能 であるといはれる.

(18) A が対角化可能 $\iff \sum_\lambda \dim W(\lambda, A) = n$. 但し, 和は A の固有値 λ のすべてに渡る.

(19) T が対角化可能 $\iff \sum_\lambda \dim W(\lambda, T) = \dim V$. 但し, 和は T の固有値 λ のすべてに渡る.

(20) 任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ に対し $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}$ が定められてゐて, 第 1 変数についても第 2 変数についても線形性を持ち, さらに任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ について $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$ が成り立ち, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0 \iff \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ を満たすとき, V には内積 (,) が定められてゐるといひ, その様な V を 内積空間 と称する.

(21) 内積空間 V においては $\|\boldsymbol{u}\| = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$ なる記法を用いる. これは $\boldsymbol{u}$ の norm と呼ばれる.

(22) 内積空間において $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ となる vectors $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は直交するといはれ $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ と記される.

(23) 実正方行列 P は ${}^tPP = I$ を満たすとき, 直交行列 と呼ばれる. これは $P\,{}^tP = I$ と同値である.

(24) 任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $(T(\boldsymbol{u}), T(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ となるとき T は 直交変換 であるといはれる.

(25) T が直交変換であることと T の表現行列が直交行列であることは同値.

(26) 実正方行列 P が直交行列であるためには, A の列 vectors の長さが全て 1 でかつ互ひに直交することが必要十分である.

(27) ${}^tA = A$ のとき A は 対称行列 と称される.

(28) どんな対称行列も直交行列により対角化される.

(29) $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ が正則行列のとき $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$ で表はされる 2 次曲線 は平行移動と直交変換を合せた $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'' + \boldsymbol{d}$ により標準形 $Ax''^2 + By''^2 = 1$ で表される曲線に合同変形される.

(30) $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ が正則な対称行列のとき, $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{23}yz + c = 0$ で表はされる 2 次曲面 はある直交行列 P で $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$ と変換することにより標準形 $Ax'^2 + By'd'^2 + Cz'^2 = 1$ で表される曲面に合同変形される.