

2019 年度 前期 中間試験 (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名			出題者
1/2	有	なし	80 分	線形代数 4			大西 良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏 名	
なし	理工学部	学科	年				

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと。最終結果だけでは得点できない。
 注意 3. 試験場の静粛を保つために、退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする。

注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと。
 注意 4. **3a** と **3b** は選択問題である。どちらか 1 問選んで解答せよ。

1 (15 点) \mathbb{R}^4 内の 3 つの vectors $\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}$ の生成

する部分空間の正規直交基を 1 組求めよ。
 (Hint : Gram-Schmidt の直交化法)

3a (20 点) 方程式 $x^2 - 4xy - 2y^2 + 10x - 8y + 13 = 0$ の標準形を求め、これが表す xy 平面上の図形の概形を図示せよ。

3b (20 点) A を n 次の実対称行列とせよ。 \mathbb{R}^n には標準内積を入れておく。 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ を A の固有値 λ, μ に対する固有 vectors とせよ。このとき $\lambda \neq \mu$ ならば $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ であることを示せ。

2 (15 点) A と B が直交行列のとき AB も直交行列であることを示せ。

4 (10 点) T を内積空間 V の線形変換とする。 T が直交変換であるためには T がどの vector の長さも変へないこと、即ち $\|T(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|$ が全ての $\mathbf{u} \in V$ について成り立つことが必要十分であることを示せ。但し $\|\mathbf{u}\|$ は \mathbf{u} の norm を表す。

5 (15点) 実対称行列 $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ に対し, $B = P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求め, B も記せ.

6 (20点) 方程式 $-5x^2 - 11y^2 + 2z^2 + 12zx + 12zy = 7$ で定義される2次曲面の標準形を求めよ. また得られた標準形の表す曲面の概略(座標軸の名称は入れること)を図示し, その曲面の名称も記せ.

7 (5点) 次の問に答へよ.

(1) 正則行列 A について $\varphi_{A^{-1}}(t) = |A|^{-1}(-t)^n \varphi_A(1/t)$ であることを示せ.

(2) 直交行列 A について $|A| = -1$ ならば -1 は A の固有値であることを証明せよ.

(Hint: 行列式が -1 であるいくつかの直交行列の固有多項式を挙げておく. $t^3 - \frac{3}{7}t^2 - \frac{3}{7}t + 1$, $t^4 + \frac{4}{9}t^3 - \frac{4}{9}t - 1$, $t^5 - \frac{3}{5}t^4 - \frac{2}{5}t^3 - \frac{2}{5}t^2 - \frac{3}{5}t + 1$.)

記号

\mathbb{N} … 自然数全体, \mathbb{Z} … 整数全体のなす環, \mathbb{Q} … 有理数全体のなす体,
 \mathbb{R} … 実数全体のなす体, \mathbb{C} … 複素数全体のなす体, I … 単位行列.

既習事項のまとめ

- (1) 行列の 主成分 とは、各行における 0 でない最も左にある成分のことである。従って主成分が存在しない行も
あり得る。
- (2) 簡約行列 とは“右下りの優しい階段状”の行列であつて、主成分がすべて 1 で、主成分のある行は主成分以外
はすべて 0 であるものこと。
- (3) どんな行列も基本変形 (掃き出し法) により簡約行列に変形 (簡約化) でき、結果は一意的である。それによ
り、連立 1 次方程式を解くことができる。
- (4) Vector 空間 V の部分集合 X について、その中に r 個の vectors からなる 1 次独立な組があり、しかも X
のどんな $r+1$ 個の vectors も 1 次従属であるとき、 r を X の 最大 1 次独立数 と呼ぶ。
- (5) Vector 空間 V の最大 1 次独立数を与へる集合 B を V の 基 または 基底 といふ。 r を V の 次元 と呼んで
 $\dim(V)$ または $\dim V$ と記す。
- (6) Vector 空間 V からそれ自身への線形写像を 線形変換 といふ。

★ 以下 V は vector 空間, 基 $\{u_1, \dots, u_n\}$ は V の基, T, T_1, T_2 等は $V \rightarrow V$ は線形変換であるとする。
 ★ A, B は n 次正方行列とする。

- (7) $(T(u_1, \dots, T(u_n))) = (u_1, \dots, u_n)$ A とする行列 A をこの基に関する T の 表現行列 と呼ぶ。
- (8) 線形写像 $T: U \rightarrow V$ について
 $\text{Ker}(T) = \{u \in U \mid T(u) = 0_V\}$ を T の 核, $\text{null}(T) = \dim(\text{Ker}(T))$ を T の 退化次数,
 $\text{Im}(T) = \{T(u) \mid u \in U\}$ を T の 像, $\text{rank}(T) = \dim(\text{Im}(T))$ を T の 階数 といふ。
- (9) $\varphi_A(t) = |tI - A|$ を A の固有多項式と称する。
- (10) $Au = \lambda u$ (あるいは $T(u) = \lambda u$) とする scalar λ と $u \neq 0$ が存在するとき、それぞれを A の (あるいは
 T の) 固有値, 固有値 λ に対する 固有 vector と称する。
- (11) $W(\lambda, A) = \{u \mid Au = \lambda u\}$ を λ に対する A の 固有空間 と称する。
- (12) $W(\lambda, T) = \{u \mid T(u) = \lambda u\}$ を λ に対する T の 固有空間 と称する。
- (13) λ が A の固有値であるためには $\varphi_A(\lambda) = 0$ であることが必要十分。
- (14) Cayley-Hamilton の定理: $\varphi_A(A) = O, \varphi_T(T) = O$ 。
- (15) Vector 空間 V 線形変換 T の V の適当な基に関する表現行列 A に対し $\varphi_T(t) = \varphi_A(t)$ と定め、これを T
の固有多項式と呼ぶ。 $\varphi_T(t)$ は V の基の選び方に依存しない。
- (16) ある正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ とするとき、 A と B は 相似 であるといはれる。
- (17) 正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき、 A は P により 対角化 されるといふ。またこのとき、
 A は 対角化可能 であるといはれる。 T の表現行列 A が対角化可能であるとき、 T は 対角化可能 であるとい
はれる。
- (18) A が対角化可能 $\iff \sum \lambda_i \dim W(\lambda_i, A) = n$. 但し、和は A の固有値 λ のすべてに渡る。
- (19) T が対角化可能 $\iff \sum \lambda_i \dim W(\lambda_i, T) = \dim V$. 但し、和は T の固有値 λ のすべてに渡る。
- (20) 任意の $u, v \in V$ に対し $(u, v) \in \mathbb{R}$ が定められていて、第 1 変数についても第 2 変数についても線形性を持
ち、さらに任意の u, v について $(u, v) = (v, u)$ が成り立ち、 $(u, u) = 0 \iff u = 0$ を満たすとき、 V に
は内積 $(,)$ が定められてあるといひ、その様な V を 内積空間 と称する。
- (21) 内積空間 V においては $\|u\| = (u, u)$ なる記法を用いる。これは u の norm と呼ばれる。
- (22) 内積空間において $(u, v) = 0$ とする vectors u, v は直交するといはれ $u \perp v$ と記される。
- (23) 実正方行列 P は $tP = I$ を満たすとき、直交行列 と呼ばれる。これは $P^t P = I$ と同値である。
- (24) 任意の $u, v \in V$ に対して $(T(u), T(v)) = (u, v)$ となるとき T は 直交変換 であるといはれる。
- (25) T が直交変換であることと T の表現行列が直交行列であることは同値。
- (26) 実正方行列 P が直交行列であるためには、 A の列 vectors の長さが全て 1 でかつ互ひに直交することが必要
十分である。
- (27) $tA = A$ のとき A は 対称行列 と称される。
- (28) どんな対称行列も直交行列により対角化される。
- (29) $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ が正則行列のとき $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$ で表はされる 2 次曲線 は平
行移動と直交変換を合せた $w = Pw' + d$ により標準形 $Aw'^2 + Bw'y'^2 = 1$ で表される曲線に合同変形される。
- (30) $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ が正則な対称行列のとき、 $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{23}yz + c = 0$ で表
はされる 2 次曲面 はある直交行列 P で $w = Pw'$ と変換することにより標準形 $Aw'^2 + Bw'y'^2 + Cz'z'^2 = 1$
で表される曲面に合同変形される。