実施：2019 年 7 月 15 日 (月) 10:50-12:20, 4-203 室

2019 年度　前期　中間試験 (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評　点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
1/2	有	なし	80 分	線 形 代 数 4　月曜 2 時限, 教科書：Original	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏　名
なし	理工学部	学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと．最終結果だけでは得点できない．
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと．
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする．
注意 4. $\boxed{\mathbf{3a}}$ と $\boxed{\mathbf{3b}}$ は選択問題である．どちらか 1 問選んで解答せよ．

$\boxed{\mathbf{1}}$ (15 点)　$\mathbb{R}^4$ 内の 3 つの vectors $\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}$ の生成する部分空間の正規直交基を 1 組求めよ．

(Hint：Gram-Schmidt の直交化法)

【答例】

$$\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \ \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

この紙面の $\boxed{1}$ ～ $\boxed{7}$ の多くは, 解答はかなり省略してあるので, 実際の解答はより詳しく書くべきである．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (15 点)　A と B が直交行列のとき AB も直交行列であることを示せ．

【答例】仮定より ${}^tAA = I, {}^tAA = I$. これにより

$$ {}^t(AB)AB = {}^tB({}^tAA)B = {}^tBB = I, $$
$$ AB{}^t(AB) = A(B{}^tB){}^tA = {}^tAA = I $$

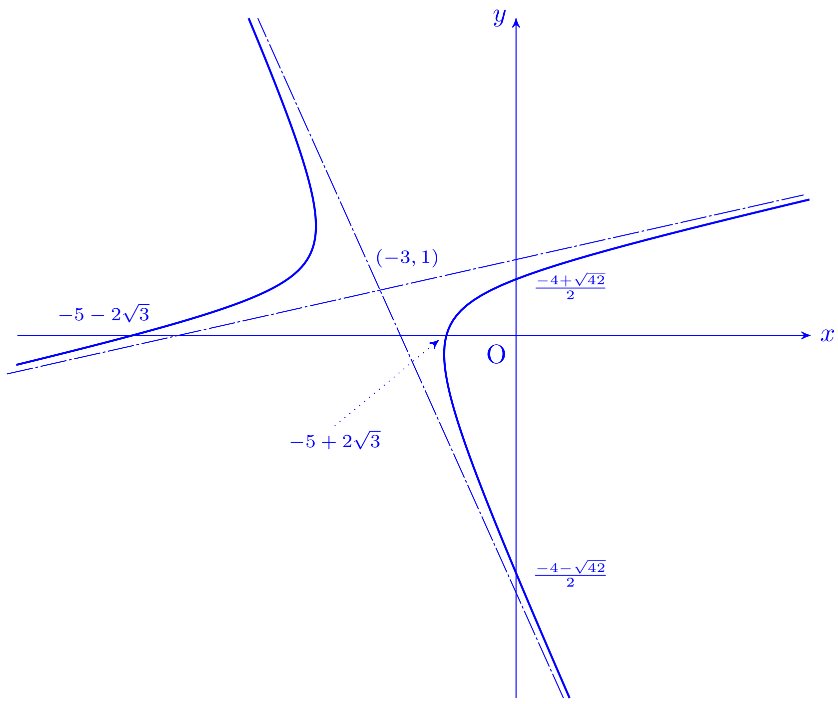
となるから ${}^t(AB) = (AB)^{-1}$　がわかり, AB は直交行列である．

$\boxed{\mathbf{3a}}$ (20 点)　方程式　$x^2 - 4xy - 2y^2 + 10x - 8y + 13 = 0$　の標準形を求め, これが表す xy 平面上の図形の概形を図示せよ．

$\boxed{\mathbf{3b}}$ (20 点)　A を n 次の実対称行列とせよ．$\mathbb{R}^n$ には標準内積を入れておく．$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ を A の固有値 λ, μ に対する固有 vectors とせよ．このとき $\lambda \neq \mu$ ならば $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ であることを示せ．

【答例】

$\boxed{3a}$ 標準形は $\dfrac{x''^2}{3} - \dfrac{y''^2}{2} = 1$.　(または $-\dfrac{x''^2}{2} + \dfrac{y''^2}{3} = 1$ など)



漸近線 $y = \frac{-2+\sqrt{6}}{2}x + \frac{-4+3\sqrt{6}}{2}$

(または $x = (2+\sqrt{6})y - 5 - \sqrt{6}$)

$y = \frac{-2-\sqrt{6}}{2}x + \frac{-4-3\sqrt{6}}{2}$

(または $x = (2-\sqrt{6})y - 5 + \sqrt{6}$)

$\boxed{3b}$　仮定より ${}^tA = A$ であるから,

$$\lambda \cdot (A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\lambda\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t(A\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = {}^t\boldsymbol{u}\,{}^tA\,\boldsymbol{v}$$
$$= (\boldsymbol{u}, {}^tA\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \mu\boldsymbol{v}) = \mu \cdot (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}).$$

よって $(\lambda - \mu)(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$. ここで, $\lambda \neq \mu$ より $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$. ゆえに $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ (10 点)　T を内積空間 V の線形変換とする．T が直交変換であるためには T がどの vector の長さも変へないこと, 即ち $\|T(\boldsymbol{u})\| = \|\boldsymbol{u}\|$　が全ての $\boldsymbol{u} \in V$　について成り立つことが必要十分であることを示せ．但し $\|\boldsymbol{u}\|$ は $\boldsymbol{u}$ の norm を表す．

【答例】　(必要性) は $\big(T(\boldsymbol{u}), T(\boldsymbol{v})\big) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ で $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ とすれば $\|T(\boldsymbol{u})\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2$ を得る．これよりわかる．

(十分性).　$\|T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\|^2$ を 2 通りに計算すると,

$$\|T(\boldsymbol{u})\|^2 + 2\big(T(\boldsymbol{u}), T(\boldsymbol{v})\big) + \|T(\boldsymbol{v})\|^2 = \|T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\|^2 = \|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \|\boldsymbol{v}\|^2.$$

ここで, $\|T(\boldsymbol{u})\| = \|\boldsymbol{u}\|$ を使へば

$$2\big(T(\boldsymbol{u}), T(\boldsymbol{v})\big) = 2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \quad 即ち \quad \big(T(\boldsymbol{u}), T(\boldsymbol{v})\big) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

を得る．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (15 点) 実対称行列 $A=\begin{bmatrix}5&4&0\\4&3&-4\\0&-4&1\end{bmatrix}$ に対し, $B=P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求め, B も記せ.

【答例】$\varphi_A(t)=(t+3)(t-3)(t-9)$,

$W(-3,A)=\mathbb{R}\cdot\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}$,

$W(3,A)=\mathbb{R}\cdot\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix}$,

$W(9,A)=\mathbb{R}\cdot\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}$.

$P=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1&2\\-1&2&2\\2&2&-1\end{bmatrix}$, $B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-3&&\\&3&\\&&9\end{bmatrix}$.

学籍番号

$\boxed{\mathbf{6}}$ (20 点) 方程式 $-5x^2-11y^2+2z^2+12zx+12zy=7$ で定義される 2 次曲面の標準形を求めよ. また得られた標準形の表す曲面の概略（座標軸の名称は入れること）を図示し, その曲面の名称も記せ.

【答例】与式は

$$A=\begin{bmatrix}-5&0&6\\0&-11&6\\6&6&2\end{bmatrix}$$

を使つて

$$[x\ y\ z]A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

と書かれる. $\varphi_A(t)=(t+7)(t-7)(t+14)$ で, 結果的には

$P=\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix}3&-6&-2\\2&3&-6\\6&2&3\end{bmatrix}$ とおけば $B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}7&&\\&-7&\\&&-14\end{bmatrix}$

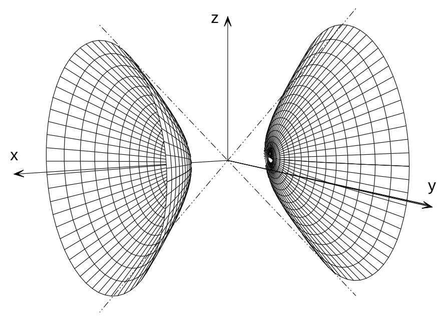
となる. このとき

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}$$

とおけば, 与式は $7{x'}^2-7y'-14{z'}^2=7$, すなはち

$$ {x'}^2-y'-2{z'}^2=1$$

となる. 下図の様な二葉双曲面である.



$\boxed{\mathbf{7}}$ (5 点) 次の問に答へよ.

(1) 正則行列 A について $\varphi_{A^{-1}}(t)=|A|^{-1}(-t)^n\varphi_A(1/t)$ であることを示せ.

(2) 直交行列 A について $|A|=-1$ ならば -1 は A の固有値であることを証明せよ.

(Hint : 行列式が -1 であるいくつかの直交行列の固有多項式を挙げておく. $t^3-\frac{3}{7}t^2-\frac{3}{7}t+1$, $t^4+\frac{4}{9}t^3-\frac{4}{9}t-1$, $t^5-\frac{3}{5}t^4-\frac{2}{5}t^3-\frac{2}{5}t^2-\frac{3}{5}t+1$.)

【答例】(1) 行列式の基本的な性質を使つて計算すると （１つ１つの等号でどんな性質が使はれてゐるか答へられなければいけない.）

$$\begin{aligned}\varphi_{A^{-1}}(t)&=|\,tI-A^{-1}|=|tA^{-1}A-A^{-1}|=|A^{-1}||tA-I|\\&=|A^{-1}|\cdot t^n\cdot|A-t^{-1}I|=|A^{-1}|\cdot t^n(-1)^n\cdot|t^{-1}I-A|=|A|^{-1}\cdot(-t)^n\cdot\varphi_A(t^{-1}).\end{aligned}$$

(2) A が直交行列であるから $\varphi_{A^{-1}}(t)=\varphi_{{}^tA}(t)=\varphi_A(t)$. 一方, 仮定 $|A|=-1$ を (1) の式に代入すると $t=-1$ について

$$\varphi_{A^{-1}}(-1)=(-1)^{-1}\,1^n\,\varphi_A(-1).\quad\therefore\quad 2\,\varphi_A(-1)=0.$$

ゆゑに $\varphi_A(-1)=0$ を得る.

記　号

$\mathbb{N}$ ⋯ 自然数全体, $\mathbb{Z}$ ⋯ 整数全体のなす環, $\mathbb{Q}$ ⋯ 有理数全体のなす体,
$\mathbb{R}$ ⋯ 実数全体のなす体, $\mathbb{C}$ ⋯ 複素数全体のなす体, I ⋯ 単位行列.

既習事項のまとめ

(1) 行列の 主成分 とは, 各行における 0 でない最も左にある成分のことである. 従つて主成分が存在しない行もあり得る.

(2) 簡約行列 とは "右下りの優しい階段状" の行列であつて, 主成分がすべて 1 で, 主成分のある行は主成分以外はすべて 0 であるもののこと.

(3) どんな行列も基本変形（掃き出し法）により簡約行列に変形（簡約化）でき, 結果は一意的である. それにより, 連立 1 次方程式を解くことができる.

(4) Vector 空間 V の部分集合 X について, その中に r 個の vectors からなる 1 次独立な組があり, しかも X のどんな $r+1$ 個の vectors も 1 次従属であるとき, r を X の 最大 1 次独立数 と呼ぶ.

(5) Vector 空間 V の最大 1 次独立数を与へる集合 B を V の 基 または 基底 といふ. r を V の 次元 と呼んで $\dim(V)$ または $\dim V$ と記す.

(6) Vector 空間 V からそれ自身への線形写像を 線形変換 といふ.

★ 以下 V は vector 空間, 基 $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ は V の基, T, T_1, T_2 等は $V\to$ は線形変換であるとする.

★ A, B は n 次正方行列とする.

(7) $\big(T(\boldsymbol{u}_1,\cdots,T(\boldsymbol{u}_n)\big)=(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n)\,A$ となる行列 A をこの基に関する T の 表現行列 と呼ぶ.

(8) 線形写像 $T:U\to V$ について
$\mathrm{Ker}(T)=\{\,\boldsymbol{u}\in U\,|\,T(\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}_V\,\}$ を T の 核, $\mathrm{null}(T)=\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$ を T の 退化次数,
$\mathrm{Im}(T)=\{\,T(\boldsymbol{u})\,|\,\boldsymbol{u}\in U\,\}$ を T の 像, $\mathrm{rank}(T)=\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$ を T の 階数 といふ.

(9) $\varphi_A(t)=|tI-A|$ を A の固有多項式と称する.

(10) $A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$（あるいは $T(\boldsymbol{u})=\lambda\boldsymbol{u}$）となる scalar λ と $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$ が存在するとき, それぞれを A の（あるいは T の）固有値, 固有値 λ に対する 固有 vector と称する.

(11) $W(\lambda,A)=\{\boldsymbol{u}\,|\,A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}\}$ を λ に対する A の 固有空間 と称する.

(12) $W(\lambda,T)=\{\boldsymbol{u}\,|\,T(\boldsymbol{u})=\lambda\boldsymbol{u}\}$ を λ に対する T の 固有空間 と称する.

(13) λ が A の固有値であるためには $\varphi_A(\lambda)=0$ であることが必要十分.

(14) Cayley-Hamilton の定理 : $\varphi_A(A)=O$, $\varphi_T(T)=O$.

(15) Vector 空間 V 線形変換 T の V の適当な基に関する表現行列 A に対し $\varphi_T(t)=\varphi_A(t)$ と定め, これを T の固有多項式と呼ぶ. $\varphi_T(t)$ は V の基の選び方に依存しない.

(16) ある正則行列 P が存在して $B=P^{-1}AP$ となるとき, A と B は 相似 であるといはれる.

(17) 正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき, A は P により 対角化 されるといふ. またこのとき, A は 対角化可能 であるといはれる. T の表現行列 A が対角化可能であるとき, T は 対角化可能 であるといはれる.

(18) A が対角化可能 $\iff\sum_\lambda\dim W(\lambda,A)=n$. 但し, 和は A の固有値 λ のすべてに渡る.

(19) T が対角化可能 $\iff\sum_\lambda\dim W(\lambda,T)=\dim V$. 但し, 和は T の固有値 λ のすべてに渡る.

(20) 任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}\in V$ に対し $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\in\mathbb{R}$ が定められてゐて, 第 1 変数についても第 2 変数についても線形性を持ち, さらに任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ について $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$ が成り立ち, $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=0\iff\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ を満たすとき, V には内積 (,) が定められてゐるといひ, その様な V を 内積空間 と称する.

(21) 内積空間 V においては $\|\boldsymbol{u}\|=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})$ なる記法を用いる. これは $\boldsymbol{u}$ の norm と呼ばれる.

(22) 内積空間において $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0$ となる vectors $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は直交するといはれ $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$ と記される.

(23) 実正方行列 P は ${}^tPP=I$ を満たすとき, 直交行列 と呼ばれる. これは $P^tP=I$ と同値である.

(24) 任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}\in V$ に対して $(T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v}))=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ となるとき T は 直交変換 であるといはれる.

(25) T が直交変換であることと T の表現行列が直交行列であることは同値.

(26) 実正方行列 P が直交行列であるためには, A の列 vectors の長さが全て 1 でかつ互ひに直交することが必要十分である.

(27) ${}^tA=A$ のとき A は 対称行列 と称される.

(28) どんな対称行列も直交行列により対角化される.

(29) $A=[a_{ij}]_{2\times2}$ が正則行列のとき $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+b_1x+b_2y+c=0$ で表はされる 2 次曲線 は平行移動と直交変換を合せた $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{x}''+\boldsymbol{d}$ により標準形 $Ax''^2+By''^2=1$ で表される曲線に合同変形される.

(30) $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ が正則な対称行列のとき, $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+a_{23}yz+c=0$ で表はされる 2 次曲面 はある直交行列 P で $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{x}'$ と変換することにより標準形 $Ax'^2+By'd'^2+Cz'^2=1$ で表される曲面に合同変形される.