実施：2020 年 7 月 20 日 (月) 10:50-12:20, 場所 自宅 等

2020 年度 **前期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評　点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
1/7	有	なし	90 分	線形代数 4　月曜 2 時限, 教科書：Original	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9 桁)	氏　名
なし	理工学部	学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 教科書はもちろん, 本問題用紙以外のものを見てはいけない.
注意 3. 裏面は使用してはならない. 各問題用紙の表面に収まる様に答案を作成せよ.
注意 4. あなた 1 人だけの静寂な環境で解答を作成すること.
注意 5. その他, “Class room” に記した注意を守ること.

$\boxed{\mathbf{1}}$ (15 点) 次の行列 A について, 線形変換 $T_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ の固有多項式 $\varphi_A(t)$, 固有値, 各固有値に対応する固有空間を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

実施：2020 年 7 月 20 日 (月) 10:50-12:20, 場所 自宅 等

2020 年度 **前期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
2/7	有	なし	90 分	線形代数 4 月曜 2 時限, 教科書：Original	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

2 (15 点) (1) $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ について $\varphi_{A^{-1}}(t) = |A|^{-1}(-t)^n\varphi_A(1/t)$ であることを示せ.

(2) $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の固有値を $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ とする. このとき, M^{-1} の固有値は ${\alpha_1}^{-1}, \cdots, {\alpha_n}^{-1}$ であることを示せ.

(Hint：(1) を利用.)

実施 : 2020 年 7 月 20 日 (月) 10:50-12:20, 場所 自宅 等

2020 年度 **前期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
3/7	有	なし	90 分	線形代数 4 月曜 2 時限, 教科書 : Original	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

3 (15 点) 線形変換 $T : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$, $T(f(x)) = f''(x)(x-1)(x+3) + f'(x)x - f(1)x^2$ について,

(1) 次の各元の像を求めよ. $f_1(x) = 6 - 2x + x^2$, $f_2(x) = -3 + 4x + x^2$, $f_3(x) = -2 + 2x + x^2$.

(2) T の固有値をすべて記し, 対応する固有空間を求めよ. (Hint : (1) から直ちにわかる.)

実施：2020 年 7 月 20 日 (月) 10:50-12:20, 場所 自宅 等

2020 年度 **前期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
4/7	有	なし	90 分	線形代数 4 月曜 2 時限, 教科書：Original	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

$\boxed{\mathbf{4}}$ (15 点) 次の行列 A について答へよ：

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

(1) 正則行列 P を見付けて $B = P^{-1}AP$ を対角行列とせよ.

(2) A^n を求めよ.（n は任意の自然数）

2020 年度 **前期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
5/7	有	なし	90 分	線形代数 4 月曜 2 時限, 教科書：Original	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏　名
なし	理工学部	学科	年			

$\boxed{\mathbf{5}}$ (15 点) 次の行列 A を対角化せよ．（$\boxed{\mathbf{1}}$ の結果を利用してよい．）

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

実施：2020 年 7 月 20 日 (月) 10:50-12:20, 場所 自宅 等

2020 年度 **前期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
6/7	有	なし	90 分	線形代数 4 月曜 2 時限, 教科書：Original	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

6 (15 点) 次の線形変換を対角化せよ：

$$T : \mathbb{R}[x]_2 \longrightarrow \mathbb{R}[x]_2, \quad T(f) = -f''(x)(x-1)^2 + f(2-x)$$

実施 : 2020 年 7 月 20 日 (月) 10:50-12:20, 場所 自宅 等

2020 年度 **前期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
7/7	有	なし	90 分	線形代数 4 月曜 2 時限, 教科書 : Original	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

7 (10 点) 行列 A の固有値多項式が $\varphi_A(t) = (t-1)(t+1)^2$ であるといふ. このとき, A^{101} を, 整数係数の A の 2 次以下の多項式で表せ.

記　号

$\mathbb{N}$ ⋯ 自然数全体,
$\mathbb{Z}$ ⋯ 整数全体のなす環,
$\mathbb{Q}$ ⋯ 有理数全体のなす体,
$\mathbb{R}$ ⋯ 実数全体のなす体,
$\mathbb{C}$ ⋯ 複素数全体のなす体,
$\mathbf{K}$ ⋯ 一般の体,
I ⋯ 単位行列,
$\mathrm{Mat}(m,n,\mathbf{K})$ ⋯ $m\times n$ 行列,
$\mathrm{Mat}(n,\mathbf{K})$ ⋯ n 次正方行列,
$\mathrm{GL}(n,\mathbf{K})$ ⋯ n 次正則行列.

既習事項のまとめ

(1) 行列の主成分とは, 各行における 0 でない最も左にある成分のことである. 従つて主成分が存在しない行もあり得る.

(2) 簡約行列とは“右下りの優しい階段状”の行列であつて, 主成分がすべて 1 で, 主成分のある列は主成分以外はすべて 0 である様なもののこと.

(3) どんな行列も基本変形（掃き出し法）により簡約行列に変形（簡約化）でき, 結果は一意的である. それにより, 連立 1 次方程式を解くことができる.

(4) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ について $[A\,|\,\boldsymbol{b}]$ をこの連立 1 次方程式の拡大係数行列とよぶ.

(5) **簡約化による連立 1 次方程式の解法**. 連立 1 次方程式の拡大係数行列に対して,
(i) ある行に 0 ではない定数を掛ける;
(ii) 2 つの行を入れ替へる;
(iii) ある行**に**別の行の定数倍を加へる,
の操作（1 回にどれか 1 つ）を何回か行なつて簡約化すれば, いかなる連立 1 次方程式をも解くことができる.

(6) 集合 V と体 $\mathbf{K}$ について, 和と scalar 倍と呼ばれる演算 $V\times V\to V$, $\mathbf{K}\times V\to V$ が定義されてゐて, 和に関して群をなし, 和と scalar 倍について分配法則が成り立ち, さらに, “ごく自然な演算規則群”が成り立つとき, V は $\mathbf{K}$ 上の vector 空間と呼ばれる.

(7) Vector 空間 V の和に関する単位元を $\mathbf{0}$ で表し零 vector と呼ぶ.

(8) Vector 空間 V の部分集合 W は,
S1. $\mathbf{0}\in W$,
S2. $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in W$ ならば $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\in W$,
S3. $c\in\mathbf{K}$, $\boldsymbol{u}\in W$ ならば $c\boldsymbol{u}\in W$
の 3 つがすべて成り立つとき, V の部分空間と呼ばれる.

(9) $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m\in V$ と $c_1,\cdots,c_n\in\mathbf{K}$ について, $c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{u}_n$ の形の式を $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合といひ, $c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{u}_n=\mathbf{0}$ なる式が成り立つとき, これを $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m$ の 1 次関係といふ.

(10) $0\boldsymbol{u}_1+0\boldsymbol{v}_2+\cdots+0\boldsymbol{u}_n=\mathbf{0}$ はいつでも正しい. これを自明な 1 次関係といふ.

(11) $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m\in V$ が自明でない 1 次関係しか満たさないとき, これらは 1 次独立であるといはれる.
また, 自明でない 1 次関係を満たすとき, これらは 1 次従属であるといはれる.

(12) （**補題 6.3.8**） V の vectors の 2 つの組 $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m\}$, $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$ について, ① $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ のどれもが $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で書けて, ② $n>m$ であるならば, $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ は 1 次従属である.

(13) （**系 6.3.9**） V の vectors の 2 つの組 $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m\}$, $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$ について, ① $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ のどれもが $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で書けて, ② $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立, であるならば $n\le m$ である.

(14) V の空でない部分集合 S が与へられたとせよ. S から選んだ vectors の組が 1 次独立で, それ以外のいかなる S vector を付け加へても 1 次従属になるとき, その組を S の最大 1 次独立な組と称し, その組を構成する vectors の個数を S の最大 1 次独立数とよぶ.

(15) （**命題 6.4.9**） $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m\in V$ を 1 次独立な vectors とし,

$$(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n)=(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m)A$$

と書けてゐるとし, $A=[\,\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n\,]$ とする. このとき, $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ には同じ 1 次関係が成り立つ.

(16) $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\in V$ の 1 次結合の全体は V の部分空間をなす. それを, これらの vectors で生成される部分空間と呼び, $\langle\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\rangle$ や $\mathbf{K}\boldsymbol{u}_1+\cdots+\mathbf{K}\boldsymbol{u}_n$ で表す.

(17) （**系 6.5.11**） Vector 空間 V に属する vectors の組 $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ の最大 1 次独立数を与へる組は, 部分空間 $\langle\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\rangle$ の基をなす.

(18) 写像 $T:U\to V$ が, 任意の $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\in U$, $c\in\mathbf{K}$ について
L1. $T(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2)=T(\boldsymbol{u}_1)+T(\boldsymbol{u}_2)$,
L2. $T(c\boldsymbol{u}_1)=cT(\boldsymbol{u}_1)$
をともに満たすとき, T は線形写像といはれる. 線形写像は零 vector を零 vector に写す.

(19) T を vector 空間 U から同 V への線形写像とする. このとき

$$\mathrm{Ker}(T)=\{\boldsymbol{u}\in U\,|\,T(\boldsymbol{u})=\mathbf{0}_V\},$$
$$\mathrm{Im}(T)=\{T(\boldsymbol{u})\,|\,\boldsymbol{u}\in U\}$$

とおく. これらはそれぞれ U, V の部分空間であり, $\mathrm{Ker}(T)$ を T の核, $\mathrm{Im}(T)$ を T の像と呼ぶ. さらに

$$\mathrm{rank}(T)=\dim(\mathrm{Im}(T)),\quad \mathrm{null}(T)=\dim(\mathrm{Ker}(T))$$

と定め, それぞれ T の階数, 退化次数といふ.

(20) 例： $A\in\mathrm{Mat}(m,n,\mathbf{R})$ で, $T:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $T(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ なら

$$\mathrm{Ker}(T)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m\,|\,A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\},$$
（連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解空間）
$$\mathrm{Im}(T)=\{A\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\},$$
（空間 $\mathbb{R}\boldsymbol{a}_1+\mathbb{R}\boldsymbol{a}_2+\cdots+\mathbb{R}\boldsymbol{a}_n$）.

(21) $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 U, V とそれぞれの基 $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$, $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m\}$, および線形写像 $T:U\to V$ に対し,

$$\big(T(\boldsymbol{u}_1),\cdots,T(\boldsymbol{u}_n)\big)=(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m)A$$

なる $A\in\mathrm{Mat}(m,n,\mathbf{K})$ を T のこれらの基に関する表現行列と呼ぶ.

(22) 線形変換 $T:V\to V$ の場合は, V の基 $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ を固定した上で, $\big(T(\boldsymbol{u}_1),\cdots,T(\boldsymbol{u}_n)\big)=(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n)A$ となる行列 A をこの基に関する T の表現行列と呼ぶ.

★ 以下 V は vector 空間, $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ は V の基, T は V の線形変換であるとする. また A は n 次正方行列とする.

(23) $\varphi_A(t)=|tI-A|$ を A の固有多項式と称する.

(24) $A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$ （あるいは $T(\boldsymbol{u})=\lambda\boldsymbol{u}$）となる scalar λ と $\boldsymbol{u}\neq\mathbf{0}$ が存在するとき, それぞれを A の（あるいは T の）固有値, 固有値 λ に対する固有 vector と称する.

(25) $W(\lambda,A)=\{\boldsymbol{u}\,|\,A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}\}$ を λ に対する A の固有空間と称する.

(26) $W(\lambda,T)=\{\boldsymbol{u}\,|\,T(\boldsymbol{u})=\lambda\boldsymbol{u}\}$ を λ に対する T の固有空間と称する.

(27) λ が A の固有値であるためには $\varphi_A(\lambda)=0$ であることが必要十分.

(28) Vector 空間 V 線形変換 T の V の適当な基に関する表現行列 A に対し $\varphi_T(t)=\varphi_A(t)$ と定め, これを T の固有多項式と呼ぶ. $\varphi_T(t)$ は V の基の選び方に依存しない.

(29) ある正則行列 P が存在して $B=P^{-1}AP$ となるとき, A と B は相似であるといはれる.

(30) 正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき, A は P により対角化されるといふ. またこのとき, A は対角化可能であるといはれる. T の表現行列 A が対角化可能であるとき, T は対角化可能であるといはれる.

(31) A が対角化可能 $\Longleftrightarrow\sum_\lambda\dim W(\lambda,A)=n$. 但し, 和は A の固有値 λ のすべてに渡る.

(32) T が対角化可能 $\Longleftrightarrow\sum_\lambda\dim W(\lambda,T)=\dim V$. 但し, 和は T の固有値 λ のすべてに渡る.

(33) Cayley-Hamilton の定理：$\varphi_A(A)=O$, $\varphi_T(T)=O$.