実施 : 2021 年 8 月 2 日 (月) 10:50-12:20, E-301 室

2021 年度 前期 定期試験 (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評　点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
1/2	有	なし	80 分	線形代数 4　月曜 2 時限, 教科書 : Original	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする.
注意 4. **3a** と **3b** および **7a** と **7b** は選択問題である.

1 (15 点) A と B が直交行列のとき AB も直交行列であることを示せ.

2 (15 点) 実対称行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 6 \\ -4 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ に対し,
$B = P^{-1}AP$ が対角行列となる 直交行列 P を求め, B も記せ.

3a (15 点) A を n 次の実対称行列とせよ. $\mathbb{R}^n$ には標準内積を入れておく. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ を A の固有値 λ, μ に対する固有 vectors とせよ. このとき $\lambda \neq \mu$ ならば $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ であることを示せ.

3b (15 点) 方程式 $-x^2 + 10xy + 18x - y^2 + 6y = 0$ の標準形を求め, これが表す xy 平面上の図形の概形を図示せよ.
（x 軸, y 軸との交点の座標, 漸近線なども可能な限り明示せよ.）

4 (10 点) T を内積空間 V の線形変換とする. T が直交変換であるためには T がどの vector の長さも変へないこと, 即ち $\|T(\boldsymbol{u})\| = \|\boldsymbol{u}\|$ が全ての $\boldsymbol{u} \in V$ について成り立つことが必要十分であることを示せ. 但し $\|\boldsymbol{u}\|$ は $\boldsymbol{u}$ の norm を表す.

学籍番号

$\boxed{\mathbf{5}}$ (20 点) 方程式 $-x^2+3y^2-2z^2-8xy+4yz+12zx=9$ で定義される 2 次曲面の標準形を求めよ. また得られた標準形の表す曲面の概略（座標軸の名称は入れること）を図示し, その曲面の名称も記せ. （$\boxed{\mathbf{2}}$ の結果を利用してよい.）

$\boxed{\mathbf{6}}$ (15 点) 次の行列の最小多項式を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 3 & & & & & \\ & 3 & 1 & & & \\ & & 3 & 1 & & \\ & & & 3 & & \\ & & & & 5 & \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{7a}}$ (10 点) 次の行列 A, B を <u>同時対角化</u> せよ. 即ち, $P \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$ を見つけて, $P^{-1}AP$ と $P^{-1}BP$ の双方を対角行列とせよ.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ -2 & 0 & 6 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 4 & -5 & 8 \\ 2 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

（Hint : T_A の 2 次元以上の固有空間については, T_B をそこに制限した線形変換の固有 vectors を求める必要がある. T_B と T_A の手順を交換して計算しても同様な処理が必要. ）

$\boxed{\mathbf{7b}}$ (10 点) A を n 次冪等行列とする. n 次正則行列 P が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$ の形となることを示せ.

記　号

$\mathbb{N}$ … 自然数全体, $\mathbb{Z}$ … 整数全体のなす環, $\mathbb{Q}$ … 有理数全体のなす体,
$\mathbb{R}$ … 実数全体のなす体, $\mathbb{C}$ … 複素数全体のなす体, I … 単位行列.

既習事項のまとめ

(1) 行列の主成分とは, 各行における 0 でない最も左にある成分のことである. 従つて主成分が存在しない行もあり得る.
(2) 簡約行列とは“右下りの優しい階段状”の行列であつて, 主成分がすべて 1 で, 主成分のある行は主成分以外はすべて 0 であるもののこと.
(3) どんな行列も基本変形（掃き出し法）により簡約行列に変形（簡約化）でき, 結果は一意的である. それにより, 連立 1 次方程式を解くことができる.
(4) Vector 空間 V の部分集合 X について, その中に r 個の vectors からなる 1 次独立な組があり, しかも X のどんな $r{+}1$ 個の vectors も 1 次従属であるとき, r を X の最大 1 次独立数と呼ぶ.
(5) Vector 空間 V の最大 1 次独立数を与へる集合 B を V の基または基底といふ. r を V の次元と呼んで $\dim(V)$ または $\dim V$ と記す.
(6) Vector 空間 V からそれ自身への線形写像を線形変換といふ.
★ 以下 V は vector 空間, 基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ は V の基, T, T_1, T_2 等は $V \to$ は線形変換であるとする.
★ A, B は n 次正方行列とする.
(1) $\big(T(\boldsymbol{u}_1, \cdots, T(\boldsymbol{u}_n)\big) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\,A$ となる行列 A をこの基に関する T の表現行列と呼ぶ.
(2) 線形写像 $T : U \to V$ について
$\mathrm{Ker}(T) = \{\,\boldsymbol{u} \in U \,|\, T(\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}_V\,\}$ を T の核, $\mathrm{null}(T) = \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$ を T の退化次数,
$\mathrm{Im}(T) = \{\,T(\boldsymbol{u}) \,|\, \boldsymbol{u} \in U\,\}$ を T の像, $\mathrm{rank}(T) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$ を T の階数といふ.
(3) $\varphi_A(t) = |tI - A|$ を A の固有多項式と称する.
(4) $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ （あるいは $T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$）となる scalar λ と $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ が存在するとき, それぞれを A の（あるいは T の）固有値, 固有値 λ に対する固有 vector と称する.
(5) $W(\lambda, A) = \{\boldsymbol{u} \,|\, A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}\}$ を λ に対する A の固有空間と称する.
(6) $W(\lambda, T) = \{\boldsymbol{u} \,|\, T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}\}$ を λ に対する T の固有空間と称する.
(7) λ が A の固有値であるためには $\varphi_A(\lambda) = 0$ であることが必要十分.
(8) Cayley-Hamilton の定理 : $\varphi_A(A) = O$, $\varphi_T(T) = O$.
(9) Vector 空間 V 線形変換 T の V の適当な基に関する表現行列 A に対し $\varphi_T(t) = \varphi_A(t)$ と定め, これを T の固有多項式と呼ぶ. $\varphi_T(t)$ は V の基の選び方に依存しない.
(10) ある正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ となるとき, A と B は相似であるといはれる.
(11) 正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき, A は P により対角化されるといふ. またこのとき, A は対角化可能であるといはれる. T の表現行列 A が対角化可能であるとき, T は対角化可能であるといはれる.
(12) A が対角化可能 $\Longleftrightarrow \sum_\lambda \dim W(\lambda, A) = n$. 但し, 和は A の固有値 λ のすべてに渡る.
(13) T が対角化可能 $\Longleftrightarrow \sum_\lambda \dim W(\lambda, T) = \dim V$. 但し, 和は T の固有値 λ のすべてに渡る.
(14) 任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ に対し $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}$ が定められてゐて, 第 1 変数についても第 2 変数についても線形性を持ち, さらに任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ について $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$ が成り立ち, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ を満たすとき, V には内積 (,) が定められてゐるといひ, その様な V を内積空間と称する.
(15) 内積空間 V においては $\|\boldsymbol{u}\| = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$ なる記法を用いる. これは $\boldsymbol{u}$ の norm と呼ばれる.
(16) 内積空間において $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ となる vectors $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は直交するといはれ $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ と記される.
(17) 実正方行列 P は ${}^tPP = I$ を満たすとき, 直交行列と呼ばれる. これは $P\,{}^tP = I$ と同値である.
(18) 任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $(T(\boldsymbol{u}), T(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ となるとき T は直交変換であるといはれる.
(19) T が直交変換であることと T の表現行列が直交行列であることは同値.
(20) 実正方行列 P が直交行列であるためには, A の列 vectors の長さが全て 1 でかつ互ひに直交することが必要十分である.
(21) ${}^tA = A$ のとき A は対称行列と称される.
(22) どんな対称行列も直交行列により対角化される.
(23) $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ が実対称行列のとき $a_{11}\,x^2 + 2a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$ で表はされる2 次曲線は平行移動と直交変換を合せた $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'' + \boldsymbol{d}$ により標準形 $Ax''^2 + By''^2 = 1$ で表される曲線に合同変形される.
(24) $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ が実対称行列のとき, $a_{11}\,x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}\,z^2 + 2a_{12}\,xy + 2a_{13}\,xz + 2a_{23}\,yz + c = 0$ で表はされる2 次曲面はある直交行列 P で $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$ と変換することにより標準形 $Ax'^2 + By'd'^2 + Cz'^2 = 1$ で表される曲面に合同変形される.
(25) $f_1, \cdots, f_r \in \mathbb{K}[t]$ と $d = d(t) = \gcd(f_1, \cdots, f_r)$ に対して $d = g_1f_1 + \cdots + g_rf_r$ なる $g_1, \cdots, g_r \in \mathbb{K}[t]$ が存在する. この様な g_j は $r > 2$ であつても互除法を繰り返せば求められる.
(26) $\mathbb{K}[t]$ の部分集合 J について $J + J \subset J$ と $J\mathbb{K}[t] \subset J$ が成り立つとき, J は $\mathbb{K}[t]$ の ideal であるといはれる.
(27) V の部分空間 $W_1, \cdots, W_s$ について, 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し $\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \cdots, \boldsymbol{w}_s \in W_s$ が一意的に存在して $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_s$ と書けるとき, V が $W_1, \cdots, W_s$ の直和であるといひ, $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ と記す.
(28) A （あるいは）T に対し $f(A) = O$（あるいは $f(T) = O$）が成り立つ多項式 $f(t) \in \mathbb{K}[t]$ のうち最小次数のものを A の（あるいは T の）最小多項式と呼び $\mu_A(t)$（あるいは $\mu_T(t)$）と記す.
(29) A が T の表現行列であれば $\mu_T(t) = \mu_A(t)$.　$\mu_A(t) \big| \varphi_A(t)$.　$\mu_T(t) \big| \varphi_T(t)$.
(30) $\mu_A(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \varphi_A(\lambda) = 0$.　$\mu_T(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \varphi_T(\lambda) = 0$.
(31) $T_1T_2 = T_2T_1$ のとき, T_1 の各固有空間は T_2 によりそれ自身に写され, T_1 と T_2 に共通の固有 vector が存在する.
(32) T_1 と T_2 がともに対角化可能で T_1 の各固有空間は T_2 によりそれ自身に写されるならば, $T_1T_2 = T_2T_1$ となる.
(33) $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ で各 i について, T_i が W_i の線形変換であるとせよ. 各 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_s$ (各 $\boldsymbol{w}_i \in W_i$) について $T(\boldsymbol{v}) = T_1(\boldsymbol{w}_1) + \cdots + T_s(\boldsymbol{w}_s)$ と定められる線形変換 T を $T_1, \cdots, T_s$ の直和と称して $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_s$ と記す.
(34) $A^2 = A$ であるとき A を冪等行列または射影行列と呼ぶ.
(35) $m \in \mathbb{N}$ が存在して $A^m = O$ となるとき A は冪零行列と呼ばれる.