

2021年度 前期 中間試験 (問題兼解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名			出題者
1/2	有	なし	80分	線形代数4 <small>月曜2時限, 教科書: Original</small>			大西良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9桁)	氏名	
なし	理工学部	学科	年				

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと。最終結果だけでは得点できない。
 注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと。

注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退回は開始 60 分後の時点の一回限りとする。
 注意 4. **3a** と **3b** および **7a** と **7b** は選択問題である。

1 (15点) A と B が直交行列のとき AB も直交行列であることを示せ。

3a (15点) A を n 次の実対称行列とせよ。 \mathbb{R}^n には標準内積を入れておく。 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ を A の固有値 λ, μ に対する固有 vectors とせよ。このとき $\lambda \neq \mu$ ならば $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ であることを示せ。

3b (15点) 方程式 $-6x^2 - 24xy + y^2 + 60x + 20y = 0$ の標準形を求め, これが表す xy 平面上の図形の概形を図示せよ。
 (x 軸, y 軸との交点の座標, 漸近線なども可能な限り明示せよ。)

2 (15点) 実対称行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ に対し,
 $B = P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求め, B も記せ。

4 (10点) T を内積空間 V の線形変換とする。 T が直交変換であるためには T がどの vector の長さも変へないこと, 即ち $\|T(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|$ が全ての $\mathbf{u} \in V$ について成り立つことが必要十分であることを示せ。但し $\|\mathbf{u}\|$ は \mathbf{u} の norm を表す。

記号

\mathbb{N} … 自然数全体, \mathbb{Z} … 整数全体のなす環, \mathbb{Q} … 有理数全体のなす体,
 \mathbb{R} … 実数全体のなす体, \mathbb{C} … 複素数全体のなす体, I … 単位行列.

既習事項のまとめ

- (1) 行列の主成分とは、各行における 0 でない最も左にある成分のことである。従って主成分が存在しない行もあり得る。
- (2) 簡約行列とは“右下りの優しい階段状”の行列であつて、主成分がすべて 1 で、主成分のある行は主成分以外はずべて 0 であるものごと。
- (3) どんな行列も基本変形 (掃き出し法) により簡約行列に変形 (簡約化) でき、結果は一意的である。それにより、連立 1 次方程式を解くことができる。
- (4) Vector 空間 V の部分集合 X について、その中に r 個の vectors からなる 1 次独立な組があり、しかも X のどんな $r+1$ 個の vectors も 1 次従属であるとき、 r を X の 最大 1 次独立数 と呼ぶ。
- (5) Vector 空間 V の最大 1 次独立数を与へる集合 B を V の基または 基底 といふ。 r を V の次元と呼んで $\dim(V)$ または $\dim V$ と記す。
- (6) Vector 空間 V からそれ自身への線形写像を 線形変換 といふ。
 - ★ 以下 V は vector 空間、基 $\{u_1, \dots, u_n\}$ は V の基、 T, T_1, T_2 等は $V \rightarrow V$ は線形変換であるとする。
 - ★ A, B は n 次正交代行列とする。
- (7) $T(\{u_1, \dots, T(u_n)\}) = \{u_1, \dots, u_n\}$ A とする行列 A をこの基に関する T の表現行列と呼ぶ。
- (8) 線形写像 $T: U \rightarrow V$ について
 - $\text{Ker}(T) = \{u \in U \mid T(u) = 0_V\}$ を T の核、 $\text{null}(T) = \dim(\text{Ker}(T))$ を T の退化次数
 - $\text{Im}(T) = \{T(u) \mid u \in U\}$ を T の像、 $\text{rank}(T) = \dim(\text{Im}(T))$ を T の階数といふ。
- (9) $\varphi_A(t) = |tI - A|$ を A の固有多項式と称する。
- (10) $Au = \lambda u$ (あるいは $T(u) = \lambda u$) となる scalar λ と $u \neq 0$ が存在するとき、それぞれを A の (あるいは T の) 固有値、固有値 λ に対する固有 vector と称する。
- (11) $W(\lambda, A) = \{u \mid Au = \lambda u\}$ を λ に対する A の固有空間と称する。
- (12) $W(\lambda, T) = \{u \mid T(u) = \lambda u\}$ を λ に対する T の固有空間と称する。
- (13) λ が A の固有値であるためには $\varphi_A(\lambda) = 0$ であることが必要十分。
- (14) Cayley-Hamilton の定理: $\varphi_A(A) = 0, \varphi_T(T) = 0$ 。
- (15) Vector 空間 V 線形変換 T の V の適当な基に関する表現行列 A に対し $\varphi_T(t) = \varphi_A(t)$ と定め、これを T の固有多項式と呼ぶ。 $\varphi_T(t)$ は V の基の選び方に依存しない。
- (16) ある正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ とするとき、 A と B は相似であるといはれる。
- (17) 正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき、 A は P により対角化されるといふ。またこのとき、 A は対角化可能であるといはれる。 T の表現行列 A が対角化可能であるとき、 T は対角化可能であるといはれる。
- (18) A が対角化可能 $\iff \sum \dim W(\lambda, A) = n$ 、但し、和は A の固有値 λ のすべてに渡る。
- (19) T が対角化可能 $\iff \sum \dim W(\lambda, T) = \dim V$ 、但し、和は T の固有値 λ のすべてに渡る。
- (20) 任意の $u, v \in V$ に対し $(u, v) \in \mathbb{R}$ が定められていて、第 1 変数についても第 2 変数についても線形性を持ち、さらに任意の u, v について $(u, v) = (v, u)$ が成り立ち、 $(u, u) = 0 \iff u = 0$ を満たすとき、 V には内積 () が定められておるといひ、その様な V を内積空間 と称する。
- (21) 内積空間 V においては $\|u\| = (u, u)$ なる記法を用いる。これは u の norm と呼ばれる。
- (22) 内積空間において $(u, v) = 0$ となる vectors u, v は直交するといはれ $u \perp v$ と記される。
- (23) 実正交代行列 P は $PP^T = I$ を満たすとき、直交代行列と呼ばれる。これは $P^T P = I$ と同値である。
- (24) 任意の $u, v \in V$ に対して $(T(u), T(v)) = (u, v)$ となるとき T は直交代変換であるといはれる。
- (25) T が直交代変換であることと T の表現行列が直交代行列であることは同値。
- (26) 実正交代行列 P が直交代行列であるためには、 A の列 vectors の長さが全て 1 でかつ互ひに直交することが必要十分である。
- (27) $'A = A$ のとき A は対称行列と称される。
- (28) どんな対称行列も直交代行列により対角化される。
- (29) $A = [a_{ij}]_{5 \times 2}$ が実対称行列のとき $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$ で表はされる 2 次曲線は平行移動と直交代変換を合せた $x = Px' + d$ により標準形 $Ax'^2 + By'd^2 = 1$ で表される曲線に合同変形される。
- (30) $A = [a_{ij}]_{8 \times 8}$ が実対称行列のとき、 $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + c = 0$ で表はされる 2 次曲面はある直交代行列 P で $x = Px'$ と変換することにより標準形 $Ax'^2 + By'd^2 + Cz'e^2 = 1$ で表される曲面に合同変形される。
- (31) $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{K}[x]$ と $d = \gcd(f_1, \dots, f_r)$ に対して $d = g_1f_1 + \dots + g_rf_r$ なる $g_1, \dots, g_r \in \mathbb{K}[x]$ が存在する。この様な g_i は $r > 2$ であつても五除法を繰り返せば求められる。
- (32) $\mathbb{K}[x]$ の部分集合 J について $J + J \subset J$ と $J\mathbb{K}[x] \subset J$ が成り立つとき、 J は $\mathbb{K}[x]$ の ideal であるといはれる。
- (33) V の部分空間 W_1, \dots, W_s について、任意の $v \in V$ に対し $v \in W_1, \dots, W_s \in W_s$ が一意的に存在して $v = w_1 + \dots + w_s$ と書けるとき、 V が W_1, \dots, W_s の直和であるといひ、 $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$ と記す。
- (34) A (あるいは T) に対し $f(A) = 0$ (あるいは $f(T) = 0$) が成り立つ多項式 $f(t) \in \mathbb{K}[t]$ のうち最小次数のものを A の (あるいは T の) 最小多項式と呼び $\mu_A(t)$ (あるいは $\mu_T(t)$) と記す。
- (35) A が T の表現行列であれば $\mu_T(t) = \mu_A(t)$ 、 $\mu_A(t) | \varphi_A(t)$ 、 $\mu_T(t) | \varphi_T(t)$ 。
- (36) $\mu_A(X) = 0 \iff \varphi_A(X) = 0$ 、 $\mu_T(X) = 0 \iff \varphi_T(X) = 0$ 。
- (37) $T_1 T_2 = T_2 T_1$ のとき T_1 の各固有空間は T_2 によりそれ自身に写され、 T_1 と T_2 に共通の固有 vector が存在する。
- (38) T_1 と T_2 がともに対角化可能で T_1 の各固有空間は T_2 によりそれ自身に写されるならば、 $T_1 T_2 = T_2 T_1$ となる。
- (39) $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$ で各 i について、 T_i が W_i の線形変換であるとき、各 $v = w_1 + \dots + w_s$ (各 $w_i \in W_i$) について $T(v) = T_1(w_1) + \dots + T_s(w_s)$ と定められる線形変換 T を T_1, \dots, T_s の直和と称して $T = T_1 \oplus \dots \oplus T_s$ と記す。
- (40) $A^2 = A$ であるとき A を冪等行列または射影行列と呼ぶ。
- (41) $m \in \mathbb{N}$ が存在して $A^m = O$ となるとき A は冪零行列と呼ばれる。