実施：2021 年 7 月 19 日 (月) 10:50-12:20, 12-201 室

2021 年度　**前期　中間試験**　(問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評　点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
1/2	有	なし	80 分	線形代数 4　月曜 2 時限, 教科書：Original	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと．最終結果だけでは得点できない．
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと．
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする．
注意 4. **3a** と **3b** および **7a** と **7b** は選択問題である．

1 (15 点)　A と B が直交行列のとき AB も直交行列であることを示せ．

解答例, 略解． 仮定より, ${}^tAA = {}^tBBI$. このとき

$${}^t(AB)(AB) = {}^tB{}^tAAB = {}^tBIB = {}^tBB = I$$

となるから AB も直交行列である．　□

2 (15 点)　実対称行列　$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$　に対し,
$B = P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求め, B も記せ．

解答例, 略解． A の固有多項式は

$$\varphi_A(t) = t^3 - 63t - 162 = (t+3)(t+6)(t-9).$$

各固有値 (に対する固有 vectors を並べたものを, 正規直交化（既に互ひに直交してゐるので, 大きさの調整のみ）し, それらが列 vectors をなす行列を P とすると（一意的ではない）

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

となり

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -3 & & \\ & -6 & \\ & & 9 \end{bmatrix}$$

である．　□

3a (15 点)　A を n 次の実対称行列とせよ．$\mathbb{R}^n$ には標準内積を入れておく．$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ を A の固有値 λ, μ に対する固有 vectors とせよ．このとき $\lambda \neq \mu$ ならば $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ であることを示せ．

3b (15 点)　方程式　$-6x^2 - 24xy + y^2 + 60x + 20y = 0$　の標準形を求め, これが表す xy 平面上の図形の概形を図示せよ．
（x 軸, y 軸との交点の座標, 漸近線なども可能な限り明示せよ.）

3a
証明　内積の性質と ${}^tA = A$ を使つて,

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) &= (\lambda\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \\ &= (\boldsymbol{u},{}^tA\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u},A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u},\mu\boldsymbol{v}) = \mu(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

よつて $(\lambda-\mu)(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 0$ である．しかるに $\lambda \neq \mu$ ゆゑ $\lambda - \mu \neq 0$ であり, $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} = 0$ でなければならない．よつて $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ である．　□

3b の略解は 3 page 目に書いてある．

4 (10 点)　T を内積空間 V の線形変換とする．T が直交変換であるためには T がどの vector の長さも変へないこと, 即ち $\|T(\boldsymbol{u})\| = \|\boldsymbol{u}\|$ が全ての　$\boldsymbol{u} \in V$　について成り立つことが必要十分であることを示せ．但し $\|\boldsymbol{u}\|$ は $\boldsymbol{u}$ の norm を表す．

解答例, 略解． 必要性：

$$\|T(\boldsymbol{u})\|^2 = (T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{u})) = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = \|\boldsymbol{u}\|^2.$$

十分性：

$$2(T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v})) = (T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}),T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})) - \|T(\boldsymbol{u})\|^2 - \|T(\boldsymbol{v})\|^2 = \|T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\|^2 - \|T(\boldsymbol{u})\|^2 - \|T(\boldsymbol{v})\|^2 = \|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u}\|^2 - \|\boldsymbol{v}\|^2 = 2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$$

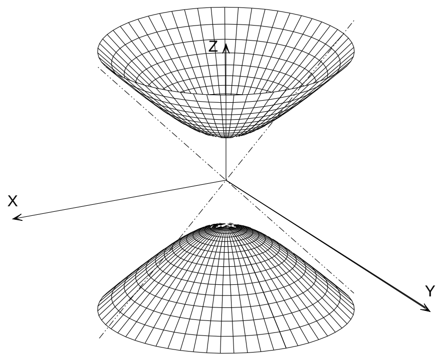
より, T は直交変換．　□

$\boxed{\mathbf{5}}$ (20 点) 方程式 $2x^2 - 3y^2 + z^2 + 4xy + 12zx + 8zy = 9$ で定義される 2 次曲面の標準形を求めよ．また得られた標準形の表す曲面の概略（座標軸の名称は入れること）を図示し，その曲面の名称も記せ．（$\boxed{\mathbf{2}}$ の結果を利用してよい.）

解答例，略解． 新座標を (X, Y, Z) とする．
問題 $\boxed{\mathbf{2}}$ の解答から，この曲面の標準形は

$$-3X^2 - 6Y^2 + 9Z^2 = 9 \quad \text{即ち}$$
$$-\frac{X^2}{3} - \frac{2Y^2}{3} + Z^2 = 1.$$

これは 二葉双曲面 である． □



$\boxed{\mathbf{6}}$ (15 点) 次の行列の最小多項式を求めよ．

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 5 & \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}.$$

解答例，略解． この行列を A とおく．A は

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad [2], \quad \begin{bmatrix} 5 & \\ & 5 \end{bmatrix}$$

を対角に並べたものであり，それぞれの最小多項式は

$$(t-2)^3, \quad t-2, \quad t-5$$

である．これらの最小公倍数が求める最小多項式であり，

$$\mu_A(t) = (t-2)^3(t-5) \ \cdots\cdots \ \text{Ans.}$$

□

学籍番号

$\boxed{\mathbf{7a}}$ (10 点) T_1, T_2 はともに，$\mathbb{C}$ 上の vector 空間 V の対角化可能な線形変換であるとし，$T_1T_2 = T_2T_1$ が成り立つてゐるとする．このとき V の基が存在して，その基に対する T_1 と T_2 の表現行列がどちらも対角行列になる．これを証明せよ．

$\boxed{\mathbf{7b}}$ (10 点) A を n 次冪等行列とする．n 次正則行列 P が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$ の形となることを示せ．

解答例，略解． $\boxed{\mathbf{7a}}$ については，課題解説「2020.07.05（月）（4-09)」にある `linalg4_exer_09B` で解説しておいた．
$\boxed{\mathbf{7b}}$ については，講義の録画「線形代数 4（11）2020.07.13（火)」にある `linalg4_lec_11A` を見られたい． □

3b

解答例，略解． x, y 軸との交点は $(0,0)$，$(0,-20)$，$(10,0)$.
計算は省略するが

$$x = x' + 1, \quad y = y' + 2$$

と変換すれば x, y の 1 次の項が消えて

$$-6x'^2 - 24x'y' + y'^2 + 50 = 0$$

となる．これは

$$[x' \ y']A\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = -50, \quad \text{但し } A = \begin{bmatrix} -6 & -12 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$$

と書ける．

$$\varphi_A(t) = (t-10)(t+15)$$

固有 vectors を求めて, それらを直交化し, 列 vectors に並べて得られる直交行列を T とする：

$$T = \tfrac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$B := {}^tTAT = \begin{bmatrix} 10 & \\ & -15 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

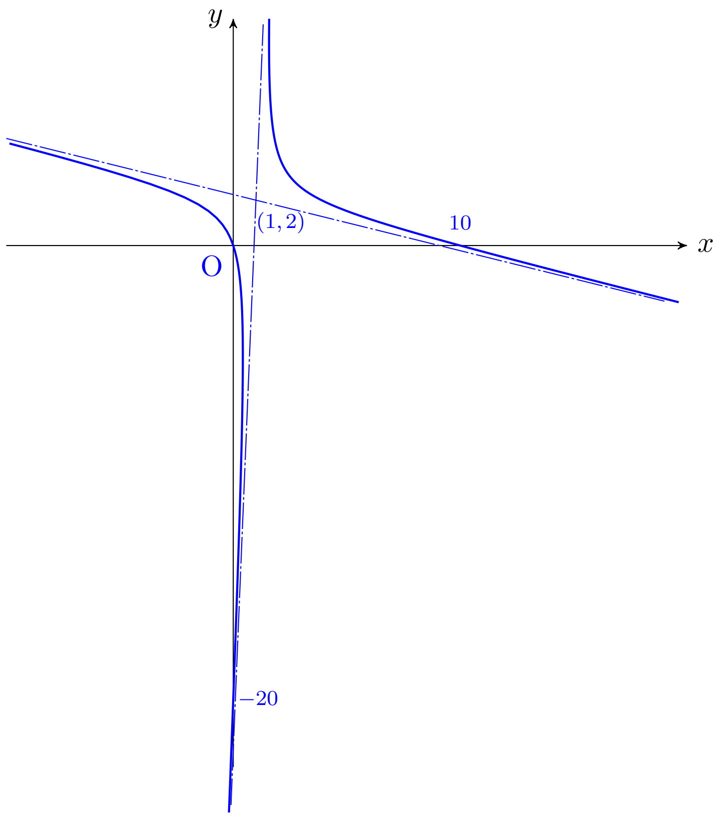
$$10x''^2 - 15y''^2 = -50,$$
$$\therefore\ 2x''^2 - 3y''^2 = -10 \ \cdots\cdots \ (\text{標準形}).$$

漸近線は（大変なので時間に余裕があればでよい）

$$\sqrt{2}x'' \pm \sqrt{3}y'' = 0 \text{ より}$$
$$(-3\sqrt{2} \pm 4\sqrt{3})x + (\pm 3\sqrt{3} + 4\sqrt{2})y + 5(-\sqrt{2} \mp 2\sqrt{3}) = 0.$$

x, y 軸との交点は

$$\begin{aligned}(x,y) &= (0, -10 - 5\sqrt{6}) = (0, -22.24\cdots), \\ &= (0, -10 + 5\sqrt{6}) = (0, 2.24\cdots), \\ &= (\tfrac{5\sqrt{6}}{3} + 5, 0) = (9.08\cdots, 0), \\ &= (-\tfrac{5\sqrt{6}}{3} + 5, 0) = (0.91\cdots, 0).\end{aligned}$$



□

記　号

$\mathbb{N}$ ⋯ 自然数全体, $\mathbb{Z}$ ⋯ 整数全体のなす環, $\mathbb{Q}$ ⋯ 有理数全体のなす体,
$\mathbb{R}$ ⋯ 実数全体のなす体, $\mathbb{C}$ ⋯ 複素数全体のなす体, I ⋯ 単位行列.

既習事項のまとめ

(1) 行列の主成分とは, 各行における 0 でない最も左にある成分のことである. 従つて主成分が存在しない行もあり得る.
(2) 簡約行列とは“右下りの優しい階段状”の行列であつて, 主成分がすべて 1 で, 主成分のある行は主成分以外はすべて 0 であるもののこと.
(3) どんな行列も基本変形（掃き出し法）により簡約行列に変形（簡約化）でき, 結果は一意的である. それにより, 連立 1 次方程式を解くことができる.
(4) Vector 空間 V の部分集合 X について, その中に r 個の vectors からなる 1 次独立な組があり, しかも X のどんな $r{+}1$ 個の vectors も 1 次従属であるとき, r を X の最大 1 次独立数と呼ぶ.
(5) Vector 空間 V の最大 1 次独立数を与へる集合 B を V の基または基底といふ. r を V の次元と呼んで $\dim(V)$ または $\dim V$ と記す.
(6) Vector 空間 V からそれ自身への線形写像を線形変換といふ.
★ 以下 V は vector 空間, 基 $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ は V の基, T, T_1, T_2 等は $V\to$ は線形変換であるとする.
★ A, B は n 次正方行列とする.
(1) $\big(T(\boldsymbol{u}_1,\cdots,T(\boldsymbol{u}_n)\big)=(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n)A$ となる行列 A をこの基に関する T の表現行列と呼ぶ.
(2) 線形写像 $T: U\to V$ について
$\mathrm{Ker}(T)=\{\,\boldsymbol{u}\in U\,|\,T(\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}_V\,\}$ を T の核, $\mathrm{null}(T)=\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$ を T の退化次数,
$\mathrm{Im}(T)=\{\,T(\boldsymbol{u})\,|\,\boldsymbol{u}\in U\,\}$ を T の像, $\mathrm{rank}(T)=\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$ を T の階数といふ.
(3) $\varphi_A(t)=|tI-A|$ を A の固有多項式と称する.
(4) $A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$ （あるいは $T(\boldsymbol{u})=\lambda\boldsymbol{u}$）となる scalar λ と $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$ が存在するとき, それぞれを A の（あるいは T の）固有値, 固有値 λ に対する固有 vector と称する.
(5) $W(\lambda,A)=\{\boldsymbol{u}\,|\,A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}\}$ を λ に対する A の固有空間と称する.
(6) $W(\lambda,T)=\{\boldsymbol{u}\,|\,T(\boldsymbol{u})=\lambda\boldsymbol{u}\}$ を λ に対する T の固有空間と称する.
(7) λ が A の固有値であるためには $\varphi_A(\lambda)=0$ であることが必要十分.
(8) Cayley-Hamilton の定理 : $\varphi_A(A)=O$, $\varphi_T(T)=O$.
(9) Vector 空間 V 線形変換 T の V の適当な基に関する表現行列 A に対し $\varphi_T(t)=\varphi_A(t)$ と定め, これを T の固有多項式と呼ぶ. $\varphi_T(t)$ は V の基の選び方に依存しない.
(10) ある正則行列 P が存在して $B=P^{-1}AP$ となるとき, A と B は相似であるといはれる.
(11) 正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき, A は P により対角化されるといふ. またこのとき, A は対角化可能であるといはれる. T の表現行列 A が対角化可能であるとき, T は対角化可能であるといはれる.
(12) A が対角化可能 $\iff \sum_\lambda \dim W(\lambda,A)=n$. 但し, 和は A の固有値 λ のすべてに渡る.
(13) T が対角化可能 $\iff \sum_\lambda \dim W(\lambda,T)=\dim V$. 但し, 和は T の固有値 λ のすべてに渡る.
(14) 任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}\in V$ に対し $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\in\mathbb{R}$ が定められてゐて, 第 1 変数についても第 2 変数についても線形性を持ち, さらに任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ について $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$ が成り立ち, $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=0 \iff \boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ を満たすとき, V には内積 (,) が定められてゐるといひ, その様な V を内積空間と称する.
(15) 内積空間 V においては $\|\boldsymbol{u}\|=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})$ なる記法を用いる. これは $\boldsymbol{u}$ の norm と呼ばれる.
(16) 内積空間において $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0$ となる vectors $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は直交するといはれ $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$ と記される.
(17) 実正方行列 P は ${}^tPP=I$ を満たすとき, 直交行列と呼ばれる. これは $P\,{}^tP=I$ と同値である.
(18) 任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}\in V$ に対して $(T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v}))=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ となるとき T は直交変換であるといはれる.
(19) T が直交変換であることと T の表現行列が直交行列であることは同値.
(20) 実正方行列 P が直交行列であるためには, A の列 vectors の長さが全て 1 でかつ互ひに直交することが必要十分である.
(21) ${}^tA=A$ のとき A は対称行列と称される.
(22) どんな対称行列も直交行列により対角化される.
(23) $A=[a_{ij}]_{2\times2}$ が実対称行列のとき $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+b_1x+b_2y+c=0$ で表はされる2 次曲線は平行移動と直交変換を合せた $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{x}''+\boldsymbol{d}$ により標準形 $Ax''^2+By''^2=1$ で表される曲線に合同変形される.
(24) $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ が実対称行列のとき, $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+c=0$ で表はされる2 次曲面はある直交行列 P で $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{x}'$ と変換することにより標準形 $Ax'^2+By'd'^2+Cz'^2=1$ で表される曲面に合同変形される.
(25) $f_1,\cdots,f_r\in\mathbb{K}[t]$ と $d=d(t)=\gcd(f_1,\cdots,f_r)$ に対して $d=g_1f_1+\cdots+g_rf_r$ なる $g_1,\cdots,g_r\in\mathbb{K}[t]$ が存在する. この様な g_j は $r>2$ であつても互除法を繰り返せば求められる.
(26) $\mathbb{K}[t]$ の部分集合 J について $J+J\subset J$ と $J\mathbb{K}[t]\subset J$ が成り立つとき, J は $\mathbb{K}[t]$ の ideal であるといはれる.
(27) V の部分空間 $W_1,\cdots,W_s$ について, 任意の $\boldsymbol{v}\in V$ に対し $\boldsymbol{w}_1\in W_1,\cdots,\boldsymbol{w}_s\in W_s$ が一意的に存在して $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}_1+\cdots+\boldsymbol{w}_s$ と書けるとき, V が $W_1,\cdots,W_s$ の直和であるといひ, $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_s$ と記す.
(28) A （あるいは）T に対し $f(A)=O$（あるいは $f(T)=O$）が成り立つ多項式 $f(t)\in\mathbb{K}[t]$ のうち最小次数のものを A の（あるいは T の）最小多項式と呼び $\mu_A(t)$（あるいは $\mu_T(t)$）と記す.
(29) A が T の表現行列であれば $\mu_T(t)=\mu_A(t)$.　$\mu_A(t)\big|\varphi_A(t)$.　$\mu_T(t)\big|\varphi_T(t)$.
(30) $\mu_A(\lambda)=0 \iff \varphi_A(\lambda)=0$. $\mu_T(\lambda)=0 \iff \varphi_T(\lambda)=0$.
(31) $T_1T_2=T_2T_1$ のとき, T_1 の各固有空間は T_2 によりそれ自身に写され, T_1 と T_2 に共通の固有 vector が存在する.
(32) T_1 と T_2 がともに対角化可能で T_1 の各固有空間は T_2 によりそれ自身に写されるならば, $T_1T_2=T_2T_1$ となる.
(33) $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_s$ で各 i について, T_i が W_i の線形変換であるとせよ. 各 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}_1+\cdots+\boldsymbol{w}_s$ (各 $\boldsymbol{w}_i\in W_i$) について $T(\boldsymbol{v})=T_1(\boldsymbol{w}_1)+\cdots+T_s(\boldsymbol{w}_s)$ と定められる線形変換 T を $T_1,\cdots,T_s$ の直和と称して $T=T_1\oplus\cdots\oplus T_s$ と記す.
(34) $A^2=A$ であるとき A を冪等行列または射影行列と呼ぶ.
(35) $m\in\mathbb{N}$ が存在して $A^m=O$ となるとき A は冪零行列と呼ばれる.