

2023 年度 前期 中間試験 (問題兼 解答用紙)

開講学部		評点小計				
理工学部						
問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者	
2/4p	有	なし	80 分	線形代数 4 <small>月曜 2 時限, 教科書: Original</small>	大西 良博	
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

評点

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと。最終結果だけでは得点できない。  
 注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと。

注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする。

1 (10 点) 次の問に答へよ。

(直交行列の全体が積に関して群をなすことの証明)

(1)  $A$  が直交行列のとき,  $A$  は正則で  $A^{-1}$  も直交行列であることを示せ。

2 (15 点) 実対称行列  $A = \begin{bmatrix} 7 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 13 \end{bmatrix}$  に対し,

$B = P^{-1}AP$  が対角行列となる直交行列  $P$  を求め,  $B$  も記せ。

(2)  $A, B$  が  $n$  次直交行列のとき,  $AB$  も直交行列であることを示せ。

3 (15点) 方程式  $7x^2 + 6\sqrt{3}xy - 34\sqrt{3}x + 13y^2 - 62y = 0$  の標準形を求め、これが表す  $xy$  平面上の図形の概形を図示せよ。  
( $x$  軸,  $y$  軸との交点の座標, 軸, 漸近線なども可能な限り明示せよ。 2 の結果を利用してよい。)

4 (15点) 実対称行列  $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 6 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$  に対し,

$B = P^{-1}AP$  が対角行列となる直交行列  $P$  を求め,  $B$  も記せ.

学籍番号

5 (15点) 方程式

$$2x^2 + 12xy + 4zx + y^2 + 8zy - 3z^2 = 6$$

で定義される 2 次曲面の標準形を求めよ. また得られた標準形の表す曲面の概略 (座標軸の名称は入れること) を図示し, その曲面の名称も記せ. (4 の結果を利用してよい.)



## 記号

$\mathbb{N}$  ... 自然数全体,  $\mathbb{Z}$  ... 整数全体のなす環,  $\mathbb{Q}$  ... 有理数全体のなす体,  
 $\mathbb{R}$  ... 実数全体のなす体,  $\mathbb{C}$  ... 複素数全体のなす体,  $I$  ... 単位行列.

## 既習事項のまとめ

- (1) 行列の主成分とは、各行における 0 でない最も左にある成分のことである。従って主成分が存在しない行もあり得る。
- (2) 簡約行列とは“右下りの美しい階段状”の行列であつて、主成分がすべて 1 で、主成分のある行は主成分以外はすべて 0 であるものこと。
- (3) どんな行列も基本変形 (掃き出し法) により簡約行列に変形 (簡約化) でき、結果は一意的である。それにより、連立 1 次方程式を解くことができる。
- (4) Vector 空間  $V$  の部分集合  $X$  について、その中に  $r$  個の vectors からなる 1 次独立な組があり、しかも  $X$  のどんな  $r+1$  個の vectors も 1 次従属であるとき、 $r$  を  $X$  の最大 1 次独立数と呼ぶ。
- (5) Vector 空間  $V$  の最大 1 次独立数を与える集合  $B$  を  $V$  の基または基底といふ。 $r$  を  $V$  の次元と呼んで  $\dim(V)$  または  $\dim V$  と記す。
- (6) Vector 空間  $V$  からそれ自身への線形写像を線形変換といふ。

★ 以下  $V$  は vector 空間、基  $\{u_1, \dots, u_n\}$  は  $V$  の基、 $T, T_1, T_2$  等は  $V \rightarrow V$  は線形変換であるとする。  
 ★  $A, B$  は  $n$  次正方行列とする。

- (7)  $(T(u_1, \dots, T(u_n))) = (u_1, \dots, u_n)$   $A$  とする行列  $A$  をこの基に関する  $T$  の表現行列と呼ぶ。
- (8) 線形写像  $T: U \rightarrow V$  について  
 $\text{Ker}(T) = \{u \in U \mid T(u) = 0_V\}$  を  $T$  の核、 $\text{null}(T) = \dim(\text{Ker}(T))$  を  $T$  の退化次数  
 $\text{Im}(T) = \{T(u) \mid u \in U\}$  を  $T$  の像、 $\text{rank}(T) = \dim(\text{Im}(T))$  を  $T$  の階数といふ。
- (9)  $\varphi_A(t) = |I - A|$  を  $A$  の固有多項式と称する。
- (10)  $Au = \lambda u$  (あるいは  $T(u) = \lambda u$ ) とする scalar  $\lambda$  と  $u \neq 0$  が存在するとき、それぞれを  $A$  の (あるいは  $T$  の) 固有値、固有値  $\lambda$  に対する固有 vector と称する。
- (11)  $W(\lambda, A) = \{u \mid Au = \lambda u\}$  を  $\lambda$  に対する  $A$  の固有空間と称する。
- (12)  $W(\lambda, T) = \{u \mid T(u) = \lambda u\}$  を  $\lambda$  に対する  $T$  の固有空間と称する。
- (13)  $\lambda$  が  $A$  の固有値であるためには  $\varphi_A(\lambda) = 0$  であることが必要十分。
- (14) Cayley-Hamilton の定理:  $\varphi_A(A) = 0$ ,  $\varphi_T(T) = 0$ .
- (15) Vector 空間  $V$  線形変換  $T$  の  $V$  の適当な基に関する表現行列  $A$  に対し  $\varphi_T(t) = \varphi_A(t)$  と定め、これを  $T$  の固有多項式と呼ぶ。 $\varphi_T(t)$  は  $V$  の基の選び方に依存しない。
- (16) ある正則行列  $P$  が存在して  $B = P^{-1}AP$  とするとき  $A$  と  $B$  は相似であるといはれる。
- (17) 正則行列  $P$  が存在して  $P^{-1}AP$  が対角行列になるとき、 $A$  は  $P$  により対角化されるといふ。またこのとき、 $A$  は対角化可能であるといはれる。 $T$  の表現行列  $A$  が対角化可能であるとき、 $T$  は対角化可能であるといはれる。
- (18)  $A$  が対角化可能  $\iff \sum \dim W(\lambda, A) = n$ 、但し、和は  $A$  の固有値  $\lambda$  のすべてに渡る。
- (19)  $T$  が対角化可能  $\iff \sum \dim W(\lambda, T) = \dim V$ 。但し、和は  $T$  の固有値  $\lambda$  のすべてに渡る。
- (20) 任意の  $u, v \in V$  に対し  $(u, v) \in \mathbb{R}$  が定められていて、第 1 変数についても第 2 変数についても線形性を持ち、さらに任意の  $u, v$  について  $(u, v) = (v, u)$  が成り立ち、 $(u, u) = 0 \iff u = 0$  を満たすとき、 $V$  には内積 ( ) が定められておるといひ、その線な  $V$  を内積空間と称する。
- (21) 内積空間  $V$  においては  $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$  なる記法を用いる。これは  $u$  の norm と呼ばれる。
- (22) 内積空間において  $(u, v) = 0$  とする vectors  $u, v$  は直交するといはれ  $u \perp v$  と記される。
- (23) 実正方行列  $P$  は  $P^T P = I$  を満たすとき、直交行列と呼ばれる。これは  $P^T P = I$  と同値である。
- (24) 任意の  $u, v \in V$  に対して  $(T(u), T(v)) = (u, v)$  となるとき  $T$  は直交変換であるといはれる。
- (25)  $T$  が直交変換であることと  $T$  の表現行列が直交行列であることは同値。
- (26) 実正方行列  $P$  が直交行列であるためには、 $A$  の列 vectors の長さが全て 1 でかつ互ひに直交することが必要十分である。
- (27)  $'A = A$  のとき  $A$  は対称行列と称される。
- (28) どんな対称行列も直交行列により対角化される。
- (29)  $A = [a_{ij}]_{5 \times 2}$  が実対称行列のとき  $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$  で表はされる 2 次曲線は平行移動と直交変換を合せた  $x = P'x' + d$  により標準形  $Ax'^2 + By'd^2 = 1$  で表される。
- (30)  $A = [a_{ij}]_{8 \times 8}$  が実対称行列のとき、 $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + c = 0$  で表はされる 2 次曲面はある直交行列  $P$  で  $x = P'x'$  と変換することにより標準形  $Ax'^2 + By'd^2 + Cz'e^2 = 1$  で表される曲面に合同変形される。
- (31)  $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{K}[t]$  と  $d = d(t) = \text{gcd}(f_1, \dots, f_r)$  に対して  $d = g_1f_1 + \dots + g_rf_r$  なる  $g_1, \dots, g_r \in \mathbb{K}[t]$  が存在する。この様な  $g_i$  は  $r > 2$  であつても五除法を繰り返せば求められる。
- (32)  $\mathbb{K}[t]$  の部分集合  $J$  について  $J + J \subset J$  と  $J\mathbb{K}[t] \subset J$  が成り立つとき、 $J$  は  $\mathbb{K}[t]$  の ideal であるといはれる。
- (33)  $V$  の部分空間  $W_1, \dots, W_s$  について、任意の  $v \in V$  に対し  $w_1 \in W_1, \dots, w_s \in W_s$  が一意的に存在して  $v = w_1 + \dots + w_s$  と書けるとき、 $V$  が  $W_1, \dots, W_s$  の直和であるといひ、 $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$  と記す。
- (34)  $A$  (あるいは  $T$ ) に対し  $f(A) = 0$  (あるいは  $f(T) = 0$ ) が成り立つ多項式  $f(t) \in \mathbb{K}[t]$  のうち最小次数のものを  $A$  の (あるいは  $T$  の) 最小多項式と呼び  $\mu_A(t)$  (あるいは  $\mu_T(t)$ ) と記す。
- (35)  $A$  が  $T$  の表現行列であれば  $\mu_T(t) = \mu_A(t)$ 、 $\mu_A(t) \mid \varphi_A(t)$ 、 $\mu_T(t) \mid \varphi_T(t)$ 。
- (36)  $\mu_A(\lambda) = 0 \iff \varphi_A(\lambda) = 0$ 、 $\mu_T(\lambda) = 0 \iff \varphi_T(\lambda) = 0$ 。
- (37) 線形変換  $T$  が対角化可能  $\iff \mu_T(t)$  は重根を持たない。(もちろん、行列に関しても対応する主張が成立する。)
- (38)  $T_1 T_2 = T_2 T_1$  のとき、 $T_1$  の各固有空間は  $T_2$  によりそれ自身に写され、 $T_1$  と  $T_2$  に共通の固有 vector が存在する。(もちろん、行列に関しても対応する主張が成立する。)
- (39)  $T_1$  と  $T_2$  がともに対角化可能で  $T_1$  の各固有空間が  $T_2$  によりそれ自身に写されるならば、 $T_1 T_2 = T_2 T_1$  となる。
- (40)  $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$  で各  $i$  について、 $T_i$  が  $W_i$  の線形変換であるとき、各  $v = w_1 + \dots + w_s$  (各  $w_i \in W_i$ ) について  $T(v) = T_1(w_1) + \dots + T_s(w_s)$  と定められる線形変換  $T$  を  $T_1, \dots, T_s$  の直和と称して  $T = T_1 \oplus \dots \oplus T_s$  と記す。
- (41)  $A^2 = A$  であるとき  $A$  を冪零行列または射影行列と呼ぶ。
- (42)  $m \in \mathbb{N}$  が存在して  $A^m = O$  となるとき  $A$  は冪零行列と呼ばれる。