実施：2024 年 7 月 29 日 (月) 10:50-12:20, N-106 室

2024 年度　前期　定期間試験　(問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評　点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
2 / 4 p	有	なし	80 分	線形代数 4　月曜 2 時限, 教科書：Original	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする.

$\boxed{1}$ (10 点) 実対称行列の固有値は全て実数であることを示せ.

(Hint : 与へられた実対称行列 A を $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ の元とみて, $\lambda\in\mathbb{C}$ を A の任意の固有値とせよ. 即ち $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ なる $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ が存在する. これの複素共役をとれば $\overline{A}\overline{\boldsymbol{x}}=\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}$ である. ここで ${}^t\overline{\boldsymbol{x}}A\boldsymbol{x}$ を 2 通りに計算することで, $\overline{\lambda}\,{}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}=\lambda\,{}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}$ を示し, これから $\overline{\lambda}=\lambda$ を示せ.)

$\boxed{2}$ (10 点) 実対称行列 $A=\begin{bmatrix}-5 & 3\sqrt{3}\\ 3\sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$ に対し, $B=P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求め, B も記せ.

学籍番号

$\boxed{\mathbf{3}}$ (15 点) 2 次曲線の方程式 $-5x^2+6\sqrt{3}xy+y^2-28x+4\sqrt{3}y=0$ の標準形を求め, これが表す xy 平面上の図形の概形を図示せよ.
（x 軸, y 軸との交点の座標, 軸, 漸近線なども可能な限り明示せよ. $\boxed{\mathbf{2}}$ の結果を利用してよい. ）

$\boxed{\mathbf{4}}$ (15 点) 実対称行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ に対し,

$B = P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求め, B も記せ.

学籍番号

$\boxed{\mathbf{5}}$ (10 点) 方程式

$$x^2 + 8xy + 3y^2 + 8yz + 5z^2 = 3$$

で定義される 2 次曲面の標準形を求めよ. また得られた標準形の表す曲面の概略（座標軸の名称は入れること）を図示し, その曲面の名称も記せ. （$\boxed{\mathbf{4}}$ の結果を利用してよい.）

$\boxed{6}$ (10 点) 実数を成分とする交代行列の固有値はすべて純虚数（但し 0 も許す）であることを示せ.

（Hint: 実対称行列の固有値はすべて実数であることの証明と同様にできる.）

$\boxed{7}$ (10 点) 次の集合は $\mathbb{R}[t]$ の ideal であるか否か,
理由を付けて答へよ.

(1) $\{\, f(t) \in \mathbb{R}[t] \mid f(1) = 0,\ f'(1) = 0 \,\}$.

(2) $\{\, f(t) \in \mathbb{R}[t] \mid f(1) = 0,\ f'(3) = 0 \,\}$.

学籍番号

$\boxed{8}$ (10 点) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5 \in \mathbb{R}^4$ について,

$$A = [\,\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_5\,],$$
$$V = \mathbb{R}\,\boldsymbol{a}_1 + \mathbb{R}\,\boldsymbol{a}_2 + \mathbb{R}\,\boldsymbol{a}_3 + \mathbb{R}\,\boldsymbol{a}_4 + \mathbb{R}\,\boldsymbol{a}_5,$$
$$W_1 = \mathbb{R}\,\boldsymbol{a}_1 + \mathbb{R}\,\boldsymbol{a}_2 + \mathbb{R}\,\boldsymbol{a}_3, \quad W_2 = \mathbb{R}\,\boldsymbol{a}_4 + \mathbb{R}\,\boldsymbol{a}_5$$

とおく. 以下の問に答へよ.

(1) A の簡約化が

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となつた. このとき $V = W_1 \oplus W_2$ は正しいか否か.
理由を付けて答へよ.

(2) A の簡約化が

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となつた. このとき $V = W_1 \oplus W_2$ は正しいか否か.
理由を付けて答へよ.

$\boxed{9}$ (10 点) 次の行列 A の最小多項式 $\mu_A(t)$ を求めよ.

(1)
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & & & & \\ & 3 & & & & \\ & & 3 & 1 & & \\ & & & 3 & & \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix}.$$

(2)
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & & & & \\ & 3 & & & & \\ & & 3 & 1 & & \\ & & & 3 & 1 & \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix}.$$

記　号

$\mathbb{N}$ … 自然数全体, $\mathbb{Z}$ … 整数全体のなす環, $\mathbb{Q}$ … 有理数全体のなす体,
$\mathbb{R}$ … 実数全体のなす体, $\mathbb{C}$ … 複素数全体のなす体, I … 単位行列.

既習事項のまとめ

(1) ${}^tA = A$ を満たす行列を対称行列と呼び, ${}^tA = -A$ を満たす行列を交代行列と呼ぶ.
(2) 行列の主成分とは, 各行における 0 でない最も左にある成分のことである. 従つて主成分が存在しない行もあり得る.
(3) 簡約行列とは"右下りの優しい階段状"の行列であつて, 主成分がすべて 1 で, 主成分のある行は主成分以外はすべて 0 であるもののこと.
(4) どんな行列も基本変形（掃き出し法）により簡約行列に変形（簡約化）でき, 結果は一意的である. それにより, 連立 1 次方程式を解くことができる.
(5) Vector 空間 V の部分集合 X について, その中に r 個の vectors からなる 1 次独立な組があり, しかも X のどんな $r+1$ 個の vectors も 1 次従属であるとき, r を X の最大 1 次独立数と呼ぶ.
(6) Vector 空間 V の最大 1 次独立数を与へる集合 B を V の基または基底といふ. r を V の次元と呼んで $\dim(V)$ または $\dim V$ と記す.
(7) Vector 空間 V からそれ自身への線形写像を線形変換といふ.

★ 以下 V は vector 空間, 基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ は V の基, T, T_1, T_2 等は $V \to$ は線形変換であるとする.
★ A, B は n 次正方行列とする.

(8) $\big(T(\boldsymbol{u}_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}_n)\big) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\,A$ となる行列 A をこの基に関する T の表現行列と呼ぶ.
(9) 線形写像 $T : U \to V$ について
$\mathrm{Ker}(T) = \{\, \boldsymbol{u} \in U \mid T(\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}_V \,\}$ を T の核, $\mathrm{null}(T) = \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$ を T の退化次数,
$\mathrm{Im}(T) = \{\, T(\boldsymbol{u}) \mid \boldsymbol{u} \in U \,\}$ を T の像, $\mathrm{rank}(T) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$ を T の階数といふ.
(10) $\varphi_A(t) = |tI - A|$ を A の固有多項式と称する.
(11) $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$（あるいは $T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$）となる scalar λ と $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ が存在するとき, それぞれを A の（あるいは T の）固有値, 固有値 λ に対する固有 vector と称する.
(12) $W(\lambda, A) = \{\boldsymbol{u} \mid A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}\}$ を λ に対する A の固有空間と称する.
(13) $W(\lambda, T) = \{\boldsymbol{u} \mid T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}\}$ を λ に対する T の固有空間と称する.
(14) λ が A の固有値であるためには $\varphi_A(\lambda) = 0$ であることが必要十分.
(15) Cayley-Hamilton の定理 : $\varphi_A(A) = O$, $\varphi_T(T) = O$.
(16) Vector 空間 V 線形変換 T の V の適当な基に関する表現行列 A に対し $\varphi_T(t) = \varphi_A(t)$ と定め, これを T の固有多項式と呼ぶ. $\varphi_T(t)$ は V の基の選び方に依存しない.
(17) ある正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ となるとき, A と B は相似であるといはれる.
(18) 正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき, A は P により対角化されるといふ. またこのとき, A は対角化可能であるといはれる. T の表現行列 A が対角化可能であるとき, T は対角化可能であるといはれる.
(19) A が対角化可能 $\iff \sum_\lambda \dim W(\lambda, A) = n$. 但し, 和は A の固有値 λ のすべてに渡る.
(20) T が対角化可能 $\iff \sum_\lambda \dim W(\lambda, T) = \dim V$. 但し, 和は T の固有値 λ のすべてに渡る.
(21) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}$ が定められてゐて, 第 1 変数についても第 2 変数についても線形性を持ち, さらに任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ について $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$ が成り立ち, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0 \iff \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ を満たすとき, V には内積 $(\ ,\ )$ が定められてゐるといひ, その様な V を内積空間と称する.
(22) 内積空間 V においては $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}$ なる記法を用いる. これは $\boldsymbol{u}$ の norm と呼ばれる.
(23) 内積空間において $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ となる vectors $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は直交するといはれ $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ と記される.
(24) 実正方行列 P は ${}^tPP = I$ を満たすとき, 直交行列と呼ばれる. これは $P\,{}^tP = I$ と同値である.
(25) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対して $(T(\boldsymbol{u}), T(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ となるとき T は直交変換であるといはれる.
(26) T が直交変換であることと T の表現行列が直交行列であることは同値.
(27) 実正方行列 P が直交行列であるためには, A の列 vectors の長さが全て 1 でかつ互ひに直交することが必要十分である.
(28) ${}^tA = A$ のとき A は対称行列と称される.
(29) どんな対称行列も直交行列により対角化される.
(30) $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ が実対称行列のとき $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$ で表はされる 2 次曲線は平行移動と直交変換を合せた $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'' + \boldsymbol{d}$ により標準形 $Ax''^2 + By''^2 = 1$ で表される曲線に合同変形される.
(31) $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ が実対称行列のとき, $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + c = 0$ で表はされる 2 次曲面はある直交行列 P で $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$ と変換することにより標準形 $Ax'^2 + By'd'^2 + Cz'^2 = 1$ で表される曲面に合同変形される.
(32) $f_1, \cdots, f_r \in \mathbb{K}[t]$ と $d = d(t) = \gcd(f_1, \cdots, f_r)$ に対して $d = g_1f_1 + \cdots + g_rf_r$ なる $g_1, \cdots, g_r \in \mathbb{K}[t]$ が存在する. この様な g_j は $r > 2$ であつても互除法を繰り返せば求められる.
(33) $\mathbb{K}[t]$ の部分集合 J について $J + J \subset J$ と $J\mathbb{K}[t] \subset J$ が成り立つとき, J は $\mathbb{K}[t]$ の ideal であるといはれる.
(34) V の部分空間 $W_1, \cdots, W_s$ について, 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し $\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \cdots, \boldsymbol{w}_s \in W_s$ が一意的に存在して $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_s$ と書けるとき, V が $W_1, \cdots, W_s$ の直和であるといひ, $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ と記す.
(35) A（あるいは）T に対し $f(A) = O$（あるいは $f(T) = O$）が成り立つ多項式 $f(t) \in \mathbb{K}[t]$ のうち最小次数のものを A の（あるいは T の）最小多項式と呼び $\mu_A(t)$（あるいは $\mu_T(t)$）と記す.
(36) A が T の表現行列であれば $\mu_T(t) = \mu_A(t)$. $\mu_A(t) \mid \varphi_A(t)$. $\mu_T(t) \mid \varphi_T(t)$.
(37) $\mu_A(\lambda) = 0 \iff \varphi_A(\lambda) = 0$. $\mu_T(\lambda) = 0 \iff \varphi_T(\lambda) = 0$.
(38) 線形変換 T が対角化可能 $\iff \mu_T(t)$ は重根を持たない. （もちろん, 行列に関しても対応する主張が成立する. ）
(39) $T_1T_2 = T_2T_1$ のとき, T_1 の各固有空間は T_2 によりそれ自身に写され, T_1 と T_2 に共通の固有 vector が存在する.
（もちろん, 行列に関しても対応する主張が成立する. ）
(40) T_1 と T_2 がともに対角化可能で T_1 の各固有空間が T_2 によりそれ自身に写されるならば, $T_1T_2 = T_2T_1$ となる.
(41) $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ で各 i について, T_i が W_i の線形変換であるとせよ. 各 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_s$ (各 $\boldsymbol{w}_i \in W_i$) について $T(\boldsymbol{v}) = T_1(\boldsymbol{w}_1) + \cdots + T_s(\boldsymbol{w}_s)$ と定められる線形変換 T を $T_1, \cdots, T_s$ の直和と称して $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_s$ と記す.
(42) $A^2 = A$ であるとき A を冪等行列または射影行列と呼ぶ.
(43) $m \in \mathbb{N}$ が存在して $A^m = O$ となるとき A は冪零行列と呼ばれる.