実施：2024 年 7 月 15 日 (月) 10:50-12:20, 12-304 室

2024 年度 **前期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評 点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
2/4p	有	なし	80 分	線形代数 4 月曜 2 時限, 教科書：Original	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする.

$\boxed{\mathbf{1}}$ (10 点) 実対称行列の固有値は全て実数であることを示せ.

(Hint : 与へられた実対称行列 A を $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ の元とみて, $\lambda\in\mathbb{C}$ を A の任意の固有値とせよ. 即ち $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ なる $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ が存在する. これの複素共役をとれば $\overline{A}\overline{\boldsymbol{x}}=\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}$ である. ここで ${}^t\overline{\boldsymbol{x}}A\boldsymbol{x}$ を 2 通りに計算することで, $\overline{\lambda}\,{}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}=\lambda\,{}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}$ を示し, これから $\overline{\lambda}=\lambda$ を示せ.)

$\boxed{\mathbf{2}}$ (10 点) 実対称行列 $A=\begin{bmatrix}-1 & 3\sqrt{3}\\ 3\sqrt{3} & 5\end{bmatrix}$ に対し, $B=P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求め, B も記せ.

学籍番号

$\boxed{\mathbf{3}}$ (15 点) 2 次曲線の方程式 $-x^2+6\sqrt{3}xy+5y^2-4\sqrt{3}x-28y=0$ の標準形を求め，これが表す xy 平面上の図形の概形を図示せよ．
（x 軸，y 軸との交点の座標，軸，漸近線なども可能な限り明示せよ．$\boxed{\mathbf{2}}$ の結果を利用してよい．）

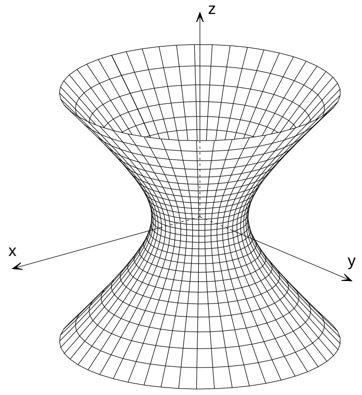
$\boxed{\mathbf{4}}$ (15 点) 実対称行列 $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ に対し,
$B = P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求め, B も記せ.

学籍番号

$\boxed{\mathbf{5}}$ (10 点) 方程式

$$5x^2 - 8xy + 3y^2 - 8yz + z^2 = 9$$

で定義される 2 次曲面の標準形を求めよ. また得られた標準形の表す曲面の概略（座標軸の名称は入れること）を図示し, その曲面の名称も記せ. （$\boxed{\mathbf{4}}$ の結果を利用してよい.)



$\boxed{\mathbf{6}}$ (10 点) 実数を成分とする交代行列の固有値はすべて純虚数 (但し 0 も許す) であることを示せ.

（Hint: 実対称行列の固有値はすべて実数であることの証明と同様にできる. ）

$\boxed{\mathbf{7}}$ (10 点) t を不定元とする. 次の集合 M は $\mathbb{R}[t]$ の ideal であるか否か,
理由を付けて答へよ.

(1) $M = \{\, f(x) \in \mathbb{R}[t] \mid f(2) = 0,\ f'(1) = 0 \,\}$.

(2) $M = \{\, f(t) \in \mathbb{R}[t] \mid f(1) = 0,\ f'(1) = 0 \,\}$.

学籍番号

$\boxed{\mathbf{8}}$ (10 点) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5 \in \mathbb{R}^4$ について,

$$A = [\, \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_5 \,],$$

$$W_1 = \mathbb{R}\,\boldsymbol{a}_1 + \mathbb{R}\,\boldsymbol{a}_2 + \mathbb{R}\,\boldsymbol{a}_3, \quad W_2 = \mathbb{R}\,\boldsymbol{a}_4 + \mathbb{R}\,\boldsymbol{a}_5$$

とおく. 以下の問に答へよ.

(1) A の簡約化が

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となつた. このとき $\mathbb{R}^4 = W_1 + W_2$ は正しいか否か. また, $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$ は正しいか否か. 理由を付けて答へよ.

(2) A の簡約化が

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となつた. このとき $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$ は正しいか否か.
理由を付けて答へよ.

$\boxed{\mathbf{9}}$ (10 点) 次の行列 A の最小多項式 $\mu_A(t)$ を記せ.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & & & & \\ & 3 & & & & \\ & & 3 & 1 & & \\ & & & 3 & & \\ & & & & -2 & 1 \\ & & & & & -2 \end{bmatrix}.$$

結果のみでよい.