

2025年度 前期 定期試験 (問題兼解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名			出題者
2/4p	有	なし	80分	線形代数4			大西良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9桁)	氏名	
なし	理工学部	学科	年				

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと。最終結果だけでは得点できない。
 注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと。

注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退中は開始 60 分後の時点の一回限りとする。

1 (10点) 実対称行列の固有値は全て実数であることを示せ。

(Hint: 与へられた実対称行列 A を $\text{Mat}(n, \mathbb{C})$ の元とみて, $\lambda \in \mathbb{C}$ を A の任意の固有値とせよ。即ち $Ax = \lambda x$ なる $x \neq 0$ が存在する。この複素共役をとれば $\overline{Ax} = \overline{\lambda x}$ である。ここで ${}^t \overline{x} Ax$ を 2 通りに計算することで, $\overline{\lambda} {}^t \overline{x} x = \lambda {}^t \overline{x} x$ を示し, これから $\overline{\lambda} = \lambda$ を示せ。)

証明. A を任意の n 次実対称行列とせよ。 $\lambda \in \mathbb{C}$ を A の固有値とせよ。即ち $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}), {}^t A = A$ であり,

$$Ax = \lambda x$$

となる複素数成分の vector $x \neq 0$ が存在する。この式の両辺の複素共役をとれば

$$A\overline{x} = \overline{\lambda x} \quad (\because A \text{ は実行列})$$

を得る。このとき

$$\begin{aligned} \overline{\lambda} {}^t \overline{x} x &= {}^t (\overline{\lambda x}) x = {}^t (A\overline{x}) x \\ &= {}^t \overline{x} {}^t A x = {}^t \overline{x} Ax = {}^t \overline{x} (\lambda x) = \lambda {}^t \overline{x} x. \end{aligned}$$

即ち,

$$(\star) \quad \overline{\lambda} {}^t \overline{x} x = \lambda {}^t \overline{x} x.$$

ここで $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ とすると $x \neq 0$ である。よつて

$${}^t \overline{x} x = \overline{x_1} x_1 + \cdots + \overline{x_n} x_n = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \neq 0$$

であるから, (\star) から $\overline{\lambda} = \lambda$, 即ち $\lambda \in \mathbb{R}$ を得る。

2 (10点) 実対称行列 $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ に対し,

$B = P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求め, B も記せ。

略解.

$$\varphi_A(t) = t^2 - 4t - 32 = (t-8)(t+4).$$

固有空間は

$$W(-8, A) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$W(2, A) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

そこで

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in O(2, \mathbb{R})$$

とおくと,

$$B = P^{-1}AP = {}^t PAP = \begin{bmatrix} -8 & \\ & 2 \end{bmatrix}$$

3 (15点) 方程式 $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 16\sqrt{2}x + 16\sqrt{2}y + 26 = 0$ の標準形を求め、これが表す xy 平面上の2次曲線 C の概形を図示せよ。
 (x 軸, y 軸との交点の座標, 軸, 漸近線なども可能な限り明示せよ。2の結果を利用してよい。)

略解. 計算を略すが, 中心は $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ である. 方程式の左辺を $F(x, y)$ とおくと,

$$0 = F(x' + \sqrt{2}, y' - \sqrt{2}) = 3x'^2 - 10x'y' + 3y'^2 - 6.$$

ここで, 2の行列 A を使ふと

$$-A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

であつて, 上の式は

$$[x' \ y'](-A)\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 6 = 0$$

と書ける. 2の結果の記号を使用して,

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} x - \sqrt{2} \\ y + \sqrt{2} \end{bmatrix} P$$

とおく. このとき 2の行列 A を用ゐて

$$F(x, y) = [x' \ y'](-A)\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 6 = -[x'' \ y'']P^{-1}AP\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} - 6 = [x'' \ y'']\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} - 6 = 8x''^2 - 2y''^2 - 6$$

なので, $(x, y) \in C \iff 4x''^2 - y''^2 - 3 = 0.$

$$4x''^2 - y''^2 = 3$$

$$\therefore \frac{x''^2}{\frac{3}{4}} - \frac{y''^2}{3} = 1.$$

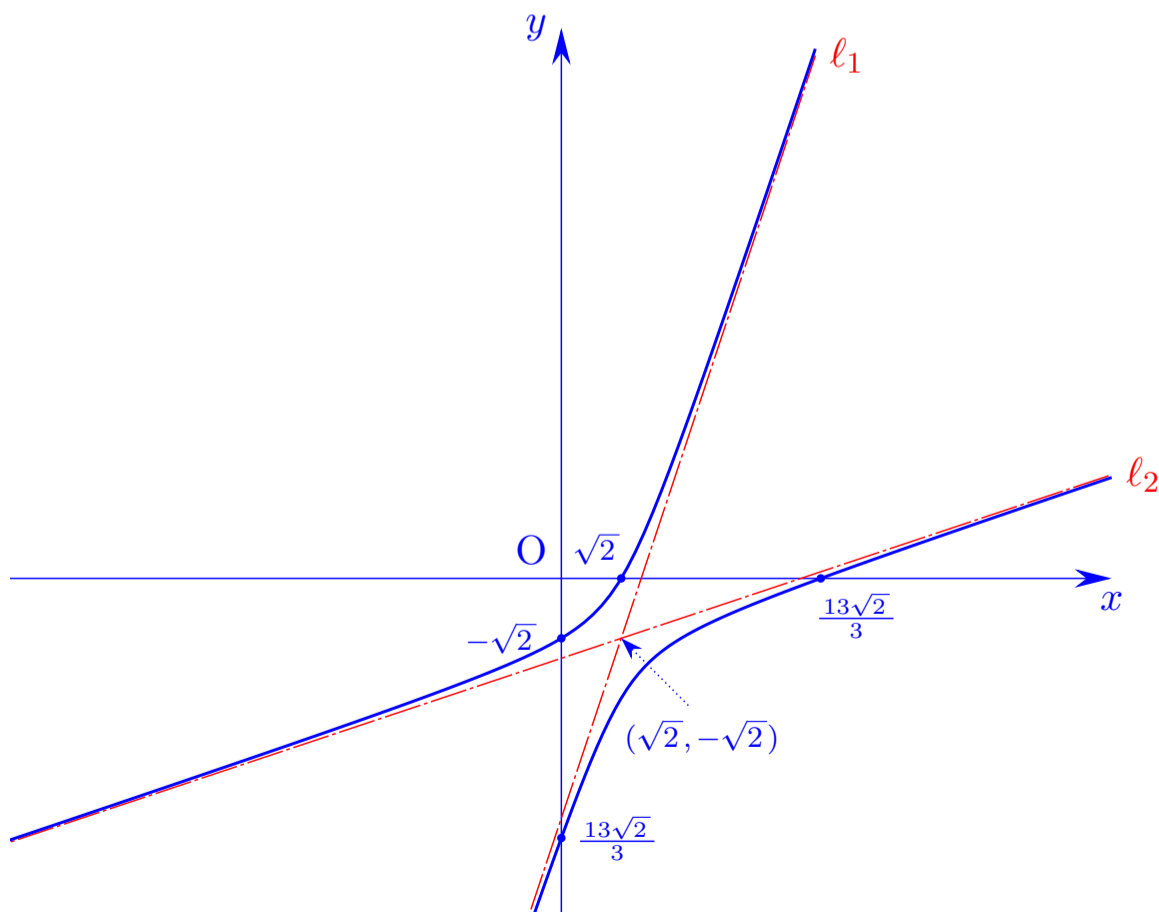
これが求める標準形であり, $x''y''$ 平面における, これの漸近線は

$$y'' = \pm\sqrt{2}x''.$$

ゆゑに, C の漸近線は

$$l_1 : y - \sqrt{2} = 3(x + \sqrt{2}),$$

$$l_2 : y - \sqrt{2} = \frac{1}{3}(x + \sqrt{2}).$$



4 (15点) 実対称行列 $A = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ に対し,

$B = P^{-1}AP$ が対角行列となる 直交行列 P を求め, B も記せ.

略解.

$$\varphi_A(t) = t^3 - 14t^2 - 49t + 686 = (t+7)(t-7)(t+14).$$

$$W(-7, A) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix},$$

$$W(7, A) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$W(14, A) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$P = \frac{1}{3} \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = {}^tPAP = \begin{bmatrix} -7 & & \\ & 7 & \\ & & 14 \end{bmatrix}$$

学籍番号

5 (10点) 方程式

$$11x^2 + 5y^2 - 2z^2 + 12xz + 12yz = 28$$

で定義される 2 次曲面の標準形を求めよ. また得られた標準形の表す曲面の概略 (座標軸の名称は入れること) を図示し, その曲面の名称も記せ. (4 の結果を利用してよい.)

略解. 4 の記号を流用する.

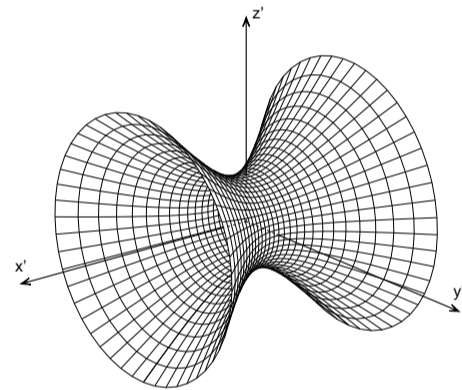
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

とおくと

$$\begin{aligned} (\text{与式の左辺}) &= [x \ y \ z] A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= [x \ y \ z] {}^tPBP \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= [x' \ y' \ z'] B \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \\ &= -7x'^2 + 7y'^2 + 14z'^2 \end{aligned}$$

となる. よつて求める標準形は

$$-\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{4} + \frac{z'^2}{2} = 1.$$



一葉双曲面

6 (10点) 実数を成分とする交代行列の固有値はすべて純虚数 (但し 0 も許す) であることを示せ.

(Hint: 実対称行列の固有値はすべて実数であることの証明と同様にできる.)

証明. 仮定より

$$Au = \lambda u, \quad Av = \mu v.$$

このとき

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (u, v) &= \lambda \cdot {}^t u v = {}^t (\lambda u) v = {}^t (Au) v \\ &= {}^t u {}^t A v = {}^t u (Av) \quad (\because A \text{ は対称行列}) \\ &= {}^t x (\mu v) = \mu \cdot {}^t u v = \mu \cdot (u, v). \end{aligned}$$

ゆえに,

$$(\lambda - \mu) \cdot (u, v) = 0.$$

ここで, 仮定より $\lambda - \mu \neq 0$ なので,

$$(u, v) = 0.$$

即ち,

$$u \perp v$$

である.

7 (10点) t を不定元とする. 次の集合 M は $\mathbb{R}[t]$ の ideal であるか否か, 理由を付けて答へよ.

$$(1) M = \{f(t) \in \mathbb{R}[t] \mid f(2) = 0, f(1) = f'(1) = 0\}.$$

略解. Hint のみ記す.

この問題の急所は, 任意の $f(t) \in M$ と $g(t) \in \mathbb{R}[t]$ について,

$$(g(t)f(t))' = g'(t)f(t) + g(t)f'(t).$$

$$\begin{aligned} \therefore (gf)'(1) &= g'(1)f(1) + g(1)f'(1) \quad (gf \text{ は } g(t)f(t) \text{ の意}) \\ &= g'(1) \cdot 0 + g(1) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

となることである. このことも使ひつつ調べれば, **I1, I2** の成立を示すことができる. よつて, M は ideal である.

$$(2) M = \{f(t) \in \mathbb{R}[t] \mid f(1) = f'(2) = 0\}.$$

略解. $(t-1)(t-3) = t^2 - 4t + 3 \in M$ である (確かめよ).

しかし, これに t を掛けると, $g(t) = t \times (t-1)(t-2) \notin M$.

実際

$$g'(t) = 3t^2 - 8t + 3, \quad g'(2) = -1 \neq 0.$$

ゆえに **I2** が不成立なので, M は ideal でない.

8 (10点) $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}^4$ について,

$$A = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5],$$

$$W_1 = \mathbb{R}a_1 + \mathbb{R}a_2, \quad W_2 = \mathbb{R}a_3 + \mathbb{R}a_4 + \mathbb{R}a_5 \quad (\text{中間試験と異なる})$$

とおく. 以下の問に答へよ.

(1) A の簡約化が

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となつた. このとき $\mathbb{R}^4 = W_1 + W_2$ は正しいか否か. また, $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$ は正しいか否か. さらに $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ はどうか. 理由を付けて答へよ.

略解. このとき $\mathbb{R}^4 = W_1 + W_2$ は正しくない. ゆえに, $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$ も正しくない.

(2) A の簡約化が

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となつた. このとき $\mathbb{R}^4 = W_1 + W_2$ は正しいか否か. また, $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$ は正しいか否か. 理由を付けて答へよ.

簡約化の結果から, a_1, a_2, a_4, a_5 は 1 次独立で, 全空間 \mathbb{R}^4 を生成する. よつて $\mathbb{R}^4 = W_1 + W_2$ である. しかし,

$$W_1 \cap W_2 \ni a_4 \neq 0$$

なので, $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$ は正しくない.

9 (10点) 次の行列 A の最小多項式 $\mu_A(t)$ を記せ.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & & & \\ & 5 & & & \\ & & 5 & 1 & \\ & & & 5 & \\ & & & & -2 & 1 \\ & & & & & -2 \end{bmatrix}.$$

結果のみでよい.

略解. $\varphi_A(t) = (t-5)^2(t+2)^2$.

記号

\mathbb{N} … 自然数全体, \mathbb{Z} … 整数全体のなす環, \mathbb{Q} … 有理数全体のなす体,
 \mathbb{R} … 実数全体のなす体, \mathbb{C} … 複素数全体のなす体, I … 単位行列.

既習事項のまとめ

- (1) $A = A$ を満たす行列を 対称行列 と呼び、 $A = -A$ を満たす行列を 交代行列 と呼ぶ。
 - (2) 行列の主成分とは、各行における 0 でない最も左にある成分のことである。従って主成分が存在しない行もあり得る。
 - (3) 簡約行列 とは“右下りの優しい階段状”の行列であつて、主成分がすべて 1 で、主成分のある行は主成分以外はすべて 0 であるものと。
 - (4) どんな行列も基本変形 (掃き出し法) により簡約行列に変形 (簡約化) でき、結果は一意的である。それにより、連立 1 次方程式を解くことができる。
 - (5) Vector 空間 V の部分集合 X について、その中に r 個の vectors からなる 1 次独立な組があり、しかも X のどんな $r+1$ 個の vectors も 1 次従属であるとき、 r を X の 最大 1 次独立数 と呼ぶ。
 - (6) Vector 空間 V の最大 1 次独立数を与える集合 B を V の 基 または 基底 といふ。 r を V の 次元 と呼んで $\dim(V)$ または $\dim V$ と記す。
 - (7) Vector 空間 V からそれ自身への線形写像を 線形変換 といふ。
- ★ 以下 V は vector 空間, 基 $\{u_1, \dots, u_n\}$ は V の基, T, T_1, T_2 等は $V \rightarrow V$ は線形変換であるとする。
 ★ A, B は n 次正交代行列とする。

- (8) $(T(u_1, \dots, T(u_n))) = (u_1, \dots, u_n)$ A となる行列 A をこの基に関する T の 表現行列 と呼ぶ。
- (9) 線形写像 $T: U \rightarrow V$ について
 $\text{Ker}(T) = \{u \in U \mid T(u) = 0_V\}$ を T の 核, $\text{null}(T) = \dim(\text{Ker}(T))$ を T の 退化次数
 $\text{Im}(T) = \{T(u) \mid u \in U\}$ を T の 値, $\text{rank}(T) = \dim(\text{Im}(T))$ を T の 階数 といふ。
- (10) $\varphi_A(t) = |tI - A|$ を A の固有多項式と称する。
- (11) $Au = \lambda u$ (あるいは $T(u) = \lambda u$) となる scalar λ と $u \neq 0$ が存在するとき、それぞれを A の (あるいは T の) 固有値, 固有値 λ に対する固有 vector と称する。
- (12) $W(\lambda, A) = \{u \mid Au = \lambda u\}$ を λ に対する A の 固有空間 と称する。
- (13) $W(\lambda, T) = \{u \mid T(u) = \lambda u\}$ を λ に対する T の 固有空間 と称する。
- (14) λ が A の固有値であるためには $\varphi_A(\lambda) = 0$ であることが必要十分。
- (15) Cayley-Hamilton の定理: $\varphi_A(A) = O, \varphi_T(T) = O$ 。
- (16) Vector 空間 V 線形変換 T の V の適当な基に関する表現行列 A に対し $\varphi_T(t) = \varphi_A(t)$ と定め、これを T の固有多項式と呼ぶ。 $\varphi_T(t)$ は V の基の並び方に依存しない。
- (17) ある正交代行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ となるとき、 A と B は 相似 であるといはれる。
- (18) 正交代行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき、 A は P により 対角化 されるといふ。またこのとき、 A は 対角化可能 であるといはれる。 T の表現行列 A が対角可能であるとき、 T は 対角化可能 であるといはれる。
- (19) A が対角化可能 $\iff \sum \dim W(\lambda, A) = n$, 但し、和は A の固有値 λ のすべてに渡る。
- (20) T が対角化可能 $\iff \sum \dim W(\lambda, T) = \dim V$. 但し、和は T の固有値 λ のすべてに渡る。
- (21) 任意の $u, v \in V$ に対し $(u, v) \in \mathbb{R}$ が定められて、第 1 変数についても第 2 変数についても線形性を持ち、さらに任意の u, v について $(u, v) = (v, u)$ が成り立ち、 $(u, u) = 0 \iff u = 0$ を満たすとき、 V には内積 () が定められており、その様な V を 内積空間 と称する。
- (22) 内積空間 V においては $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ なる記法を用いる。これは u の norm と呼ばれる。
- (23) 内積空間において $(u, v) = 0$ となる vectors u, v は直交するといはれ $u \perp v$ と記される。
- (24) 実正交代行列 P は $P^T = P = I$ を満たすとき、直交代行列と呼ばれる。これは $P^T = I$ と同値である。
- (25) 任意の $u, v \in V$ に対して $(T(u), T(v)) = (u, v)$ となるとき T は 直交代変換 であるといはれる。
- (26) T が直交代変換であることと T の表現行列が直交代行列であることは同値。
- (27) 実正交代行列 P が直交代行列であるためには、 A の列 vectors の長さが全て 1 でかつ互ひに直交することが必要十分である。
- (28) $A = A$ のとき A は 対称行列 と称される。
- (29) どんな対称行列も直交代行列により対角化される。
- (30) $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ が実対称行列のとき $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + b_2y + c = 0$ で表はされる 2 次曲線は平行移動と直交代換を合せた $x = Px' + d$ により標準形 $Ax'^2 + By'^2 = 1$ で表される曲線に合同変形される。
- (31) $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ が実対称行列のとき、 $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + c = 0$ で表はされる 2 次曲面はある直交代行列 P で $x = Px'$ と変換することにより標準形 $Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 = 1$ で表される曲面に合同変形される。
- (32) $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{R}[x]$ と $d = \gcd(f_1, \dots, f_r)$ に対して $d = g_1f_1 + \dots + g_rf_r$ なる $g_1, \dots, g_r \in \mathbb{R}[x]$ が存在する。この様な g_i は $r > 2$ であつても互除法を繰り返せば求められる。
- (33) $\mathbb{R}[x]$ の部分集合 J について $J + J \subset J$ と $J\mathbb{R}[x] \subset J$ が成り立つとき、 J は $\mathbb{R}[x]$ の ideal であるといはれる。
- (34) V の部分空間 W_1, \dots, W_r について、任意の $v \in V$ に対し $w_1 \in W_1, \dots, w_r \in W_r$ が一意的に存在して $v = w_1 + \dots + w_r$ と書けるとき、 V が W_1, \dots, W_r の直和であるといひ、 $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$ と記す。
- (35) A (あるいは T) に対し $f(A) = O$ (あるいは $f(T) = O$) が成り立つ多項式 $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ のうち最小次数のものを A の (あるいは T の) 最小多項式と呼び $\mu_A(t)$ (あるいは $\mu_T(t)$) と記す。
- (36) A が T の表現行列であれば $\mu_T(t) = \mu_A(t)$ 。 $\mu_A(t) \mid \varphi_A(t)$ 。 $\mu_T(t) \mid \varphi_T(t)$ 。
- (37) $\mu_A(\lambda) = 0 \iff \varphi_A(\lambda) = 0$ 。 $\mu_T(\lambda) = 0 \iff \varphi_T(\lambda) = 0$ 。
- (38) 線形変換 T が対角化可能 $\iff \mu_T(t)$ は重根を持たない。(もちろん、行列に関しても対応する主張が成立する。)
- (39) $T_1 T_2 = T_2 T_1$ のとき、 T_1 の各固有空間は T_2 によりそれ自身に写され、 T_1 と T_2 に共通の固有 vector が存在する。(もちろん、行列に関しても対応する主張が成立する。)
- (40) T_1 と T_2 がともに対角化可能で T_1 の各固有空間が T_2 によりそれ自身に写されるならば、 $T_1 T_2 = T_2 T_1$ となる。
- (41) $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$ で、各 i について、 T_i が W_i の線形変換であるとき、各 $v = w_1 + \dots + w_r$ (各 $w_i \in W_i$) について $T(v) = T_1(w_1) + \dots + T_r(w_r)$ と定められる線形変換 T を T_1, \dots, T_r の直和と称して $T = T_1 \oplus \dots \oplus T_r$ と記す。
- (42) $A^2 = A$ であるとき A を 冪零行列 または 射影行列 と呼ぶ。
- (43) $m \in \mathbb{N}$ が存在して $A^m = O$ となるとき A は 冪零行列 と呼ばれる。