実施：2025 年 7 月 14 日 (月) 10:50-12:20, 12-304 室

2025 年度　**前期　中間試験**　(問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
2/4p	有	なし	80 分	線形代数 4　月曜 2 時限, 教科書：Original	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

評点

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと．最終結果だけでは得点できない．
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと．
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする．

$\boxed{1}$ (10 点) 実対称行列の固有値は全て実数であることを示せ．

(Hint : 与へられた実対称行列 A を $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ の元とみて, $\lambda\in\mathbb{C}$ を A の任意の固有値とせよ．即ち $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ なる $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ が存在する．これの複素共役をとれば $\overline{A\boldsymbol{x}}=\overline{\lambda\boldsymbol{x}}$ である．ここで ${}^t\overline{\boldsymbol{x}}A\boldsymbol{x}$ を 2 通りに計算することで, $\overline{\lambda}\,{}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}=\lambda\,{}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}$ を示し, これから $\overline{\lambda}=\lambda$ を示せ．)

証明. A を任意の n 次実対称行列とせよ．$\lambda\in\mathbb{C}$ を A の固有値とせよ．即ち $A\in\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$, ${}^tA=A$ であり,

$$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$$

となる複素数成分の vector $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ が存在する．この式の両辺の複素共役をとれば

$$A\overline{\boldsymbol{x}}=\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}\quad(\because\ A\text{ は実行列})$$

を得る．このとき

$$\begin{aligned}\overline{\lambda}\,{}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}&={}^t(\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{x}={}^t(A\overline{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{x}\\&={}^t\overline{\boldsymbol{x}}\,{}^tA\boldsymbol{x}={}^t\overline{\boldsymbol{x}}A\boldsymbol{x}={}^t\overline{\boldsymbol{x}}(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda\,{}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

即ち,

$$(\bigstar)\qquad \overline{\lambda}\,{}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}=\lambda\,{}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}.$$

ここで $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$ とすると $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ である．よつて

$${}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}=\overline{x_1}x_1+\cdots+\overline{x_n}x_n=|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2\neq 0$$

であるから, $(\bigstar)$ から $\overline{\lambda}=\lambda$, 即ち $\lambda\in\mathbb{R}$ を得る．

$\boxed{2}$ (10 点) 実対称行列 $A=\begin{bmatrix}1 & 3\sqrt{3}\\ 3\sqrt{3} & -5\end{bmatrix}$ に対し, $B=P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求め, B も記せ．

略解.

$$\varphi_A(t)=t^2-4t-32=(t-8)(t+4).$$

固有空間は

$$W(-8,A)=\mathbb{R}\begin{bmatrix}1\\ -\sqrt{3}\end{bmatrix},$$
$$W(4,A)=\mathbb{R}\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{bmatrix}.$$

そこで

$$P=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{bmatrix}\in\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$$

とおくと,

$$B=P^{-1}AP={}^tPAP=\begin{bmatrix}-8 & \\ & 4\end{bmatrix}$$

学籍番号

$\boxed{\mathbf{3}}$ (15 点)　方程式　$x^2-5y^2+6\sqrt{3}xy-4\sqrt{3}x+28y-15=0$　の標準形を求め，これが表す xy 平面上の 2 次曲線 C の概形を図示せよ．（x 軸, y 軸との交点の座標, 軸, 漸近線なども可能な限り明示せよ． $\boxed{\mathbf{2}}$ の結果を利用してよい．）

略解．計算を略すが，中心は $(-\sqrt{3},1)$ である．方程式の左辺を $F(x,y)$ とおくと，

$$0=F(x'-\sqrt{3},y'+1)=x'^2+6\sqrt{3}x'y'-5y'^2+5$$
$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\sqrt{3}\\ 3\sqrt{3} & -5\end{bmatrix}$$

とおくと，これは

$$[x'\ y']A\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}+5=0$$

と書ける．$\boxed{\mathbf{2}}$ の結果の記号を使用して，

$$\begin{bmatrix}x''\\ y''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}P=\begin{bmatrix}x+\sqrt{3}\\ y-1\end{bmatrix}P$$

とおく．このとき

$$F(x,y)=[x'\ y']A\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}+5=[x''\ y'']P^{-1}AP\begin{bmatrix}x''\\ y''\end{bmatrix}+5=[x''\ y'']\begin{bmatrix}-8 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x''\\ y''\end{bmatrix}+5=-8x''^2+4y''^2+5$$

なので，$(x,y)\in C \iff -8x''^2+4y''^2+10=0.$

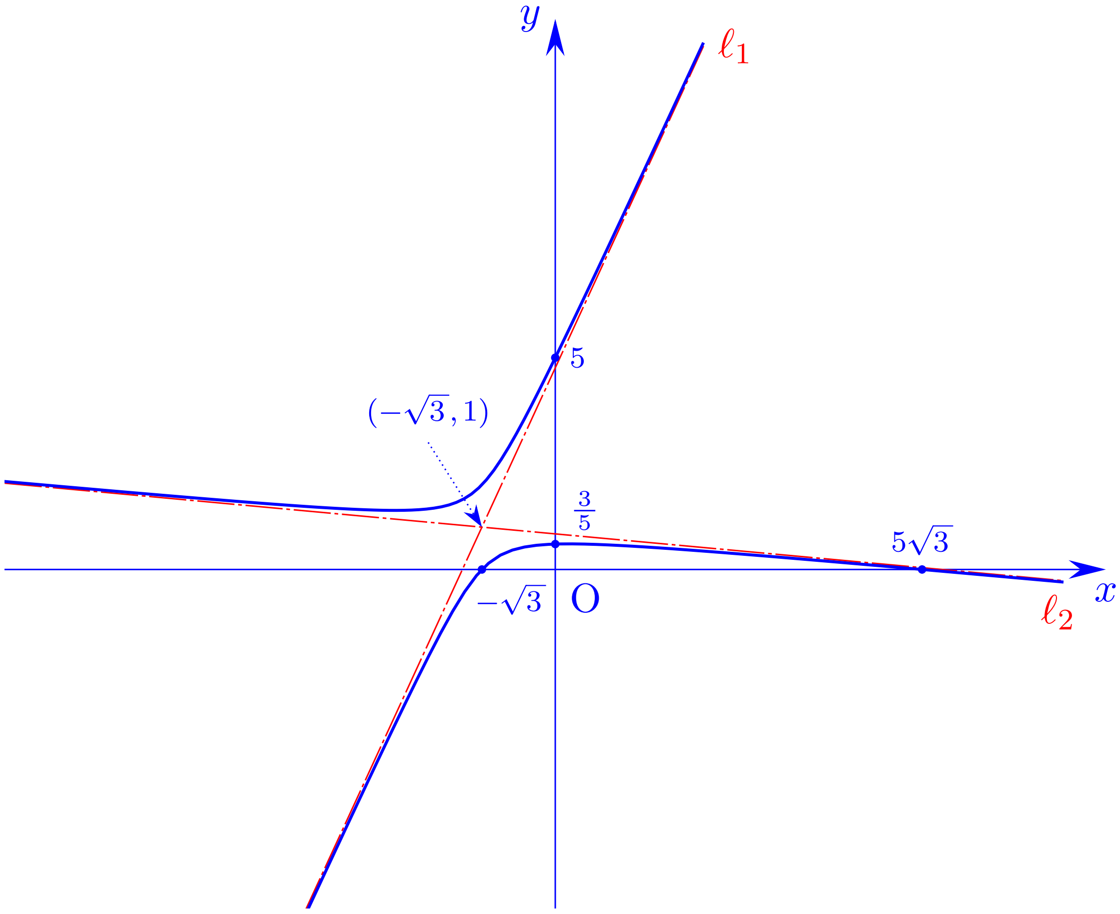
$$8x''^2-4y''^2=5$$
$$\therefore\ \frac{x''^2}{\frac{5}{8}}-\frac{y''^2}{\frac{5}{4}}=1.$$

これが求める標準形であり，$x''y''$ 平面における，これの漸近線は

$$y''=\pm\sqrt{2}x''.$$

ゆえに，C の漸近線は

$$\ell_1:\ y-1=\left(\frac{3\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{5}\right)(x+\sqrt{3})\quad(=2.1706...\times(x+\sqrt{3})),$$
$$\ell_2:\ y-1=\left(\frac{3\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{5}\right)(x+\sqrt{3})\quad(=-0.0921...\times(x+\sqrt{3})).$$



学籍番号

$\boxed{4}$ (15 点) 実対称行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -4 \\ -6 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ に対し,

$B = P^{-1}AP$ が対角行列となる <u>直交行列</u> P を求め, B も記せ.

略解.

$$\varphi_A(t) = t^3 - 63t - 162 = (t-9)(t+3)(t+6).$$

$$W(9, A) = \mathbb{R}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$W(-3, A) = \mathbb{R}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$W(-6, A) = \mathbb{R}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = {}^tPAP = \begin{bmatrix} 9 & & \\ & -3 & \\ & & -6 \end{bmatrix}$$

$\boxed{5}$ (10 点) 方程式

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 12xy - 8xz + 4yz = 9$$

で定義される 2 次曲面の <u>標準形</u> を求めよ. また得られた標準形の表す曲面の概略（座標軸の名称は入れること）を <u>図示</u> し, その曲面の <u>名称</u> も記せ. （$\boxed{4}$ の結果を利用してよい.）

略解. $\boxed{4}$ の記号を流用する.

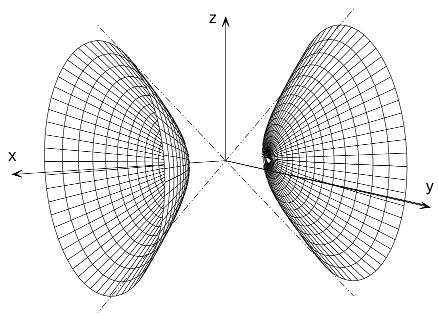
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

とおくと

$$\begin{aligned}(\text{与式の左辺}) &= [x\ y\ z]A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= [x\ y\ z]\,{}^tPBP\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= [x'\ y'\ z']B\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \\ &= 9x'^2 - 3y'^2 - 6z'^2\end{aligned}$$

となる. よつて求める標準形は

$$x'^2 - \frac{y'^2}{3} - \frac{z'^2}{\frac{3}{2}} = 1.$$



二葉双曲面

学籍番号

$\boxed{6}$ (10 点) A を n 次の実対称行列とせよ．$\mathbb{R}^n$ には標準内積を入れておく．$\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ をそれぞれ A の固有値 $\lambda,\, \mu$ に対する固有 vectors とせよ．このとき $\lambda \neq \mu$ ならば $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ であることを示せ．

証明． 仮定より

$$A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}, \quad A\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{v}.$$

このとき

$$\begin{aligned}\lambda \cdot (\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}) &= \lambda \cdot {}^t\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v} = {}^t(\lambda\,\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{v} = {}^t(A\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} \\ &= {}^t\boldsymbol{u}\,{}^tA\boldsymbol{v} = {}^t\boldsymbol{u}(A\boldsymbol{v}) \quad (\because A \text{ は対称行列}) \\ &= {}^t\boldsymbol{x}(\mu\,\boldsymbol{v}) = \mu \cdot {}^t\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v} = \mu \cdot (\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}).\end{aligned}$$

ゆゑに，

$$(\lambda - \mu) \cdot (\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}) = 0.$$

ここで，仮定より $\lambda - \mu \neq 0$ なので，

$$(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}) = 0.$$

即ち，

$$\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$$

である．

$\boxed{7}$ (10 点) t を不定元とする．次の集合 M は $\mathbb{R}[t]$ の ideal であるか否か，理由を付けて答へよ．

(1) $M = \{\, f(t) \in \mathbb{R}[t] \mid f(2) = 0,\ f(1) = f'(1) = 0\,\}$.

略解． Ideal である．実際 **I1** は簡単に示されるし，**I2** についても以下の様にして示される．
任意の $g(t) \in \mathbb{R}[t]$ と $f(t) \in M$ について，

$$g(1)f(1) = g(1) \cdot 0 = 0$$

であるし，

$$(fg)' = f'g + fg'$$

なので

$$(fg)'(1) = f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = 0 \cdot g(1) + 0 \cdot g'(1) = 0.$$

残りの条件 $g(2)f(2) = 0$ を満たすことも簡単に確認できる．

(2) $M = \{\, f(t) \in \mathbb{R}[t] \mid f(0) = f'(1) = 0\,\}$.

略解． $f(t) = t(t-2) = t^2 - 2t$ について $f'(t) = 2t - 2,\ f(0) = 0,\ f'(1) = 0$ なので $f \in \mathbb{R}[t]$.
一方，$g(t) = tf(t) = t^3 - 2t^2$ について，$g'(t) = 3t^2 - 4t,\ g'(1) = 0$ なので $g \notin \mathbb{R}[t]$. よつて M は ideal ではない．

$\boxed{8}$ (10 点) $\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{a}_3,\, \boldsymbol{a}_4,\, \boldsymbol{a}_5 \in \mathbb{R}^4$ について，

$$A = [\,\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_5\,],$$

$$W_1 = \mathbb{R}\,\boldsymbol{a}_1 + \mathbb{R}\,\boldsymbol{a}_2 + \mathbb{R}\,\boldsymbol{a}_3, \quad W_2 = \mathbb{R}\,\boldsymbol{a}_4 + \mathbb{R}\,\boldsymbol{a}_5$$

とおく．以下の問に答へよ．

(1) A の簡約化が

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となつた． このとき $\mathbb{R}^4 = W_1 + W_2$ は正しいか否か． また，$\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$ は正しいか否か．理由を付けて答へよ．

略解． どちらも正しい．

(2) A の簡約化が

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となつた．このとき $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$ は正しいか否か．
理由を付けて答へよ．

簡約化の結果から，$\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{a}_4,\, \boldsymbol{a}_5$ は 1 次独立で，全空間 $\mathbb{R}^4$ を生成する．よつて $\mathbb{R}^4 = W_1 + W_2$ である．しかし，

$$W_1 \cap W_2 \ni \boldsymbol{a}_4 \neq \boldsymbol{0}$$

なので，$\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$ は正しくない．

$\boxed{9}$ (10 点) 次の行列 A の最小多項式 $\mu_A(t)$ を記せ．

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & & & & \\ & 5 & 1 & & & \\ & & 5 & & & \\ & & & 5 & & \\ & & & & -2 & 1 \\ & & & & & -2 \end{bmatrix}.$$

結果のみでよい．

略解． $\mu_A(t) = (t-5)^3(t+2)^2$.

記　号

$\mathbb{N}$ … 自然数全体, $\mathbb{Z}$ … 整数全体のなす環, $\mathbb{Q}$ … 有理数全体のなす体,
$\mathbb{R}$ … 実数全体のなす体, $\mathbb{C}$ … 複素数全体のなす体, I … 単位行列.

既習事項のまとめ

(1) ${}^tA = A$ を満たす行列を対称行列と呼び, ${}^tA = -A$ を満たす行列を交代行列と呼ぶ.
(2) 行列の主成分とは, 各行における 0 でない最も左にある成分のことである. 従つて主成分が存在しない行もあり得る.
(3) 簡約行列とは "右下りの優しい階段状" の行列であつて, 主成分がすべて 1 で, 主成分のある行は主成分以外はすべて 0 であるもののこと.
(4) どんな行列も基本変形（掃き出し法）により簡約行列に変形（簡約化）でき, 結果は一意的である. それにより, 連立 1 次方程式を解くことができる.
(5) Vector 空間 V の部分集合 X について, その中に r 個の vectors からなる 1 次独立な組があり, しかも X のどんな $r{+}1$ 個の vectors も 1 次従属であるとき, r を X の最大 1 次独立数と呼ぶ.
(6) Vector 空間 V の最大 1 次独立数を与へる集合 B を V の基または基底といふ. r を V の次元と呼んで $\dim(V)$ または $\dim V$ と記す.
(7) Vector 空間 V からそれ自身への線形写像を線形変換といふ.

★ 以下 V は vector 空間, 基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ は V の基, T, T_1, T_2 等は $V \to$ は線形変換であるとする.
★ A, B は n 次正方行列とする.

(8) $\big(T(\boldsymbol{u}_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}_n)\big) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)A$ となる行列 A をこの基に関する T の表現行列と呼ぶ.
(9) 線形写像 $T : U \to V$ について
$\mathrm{Ker}(T) = \{\boldsymbol{u} \in U \mid T(\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}_V\}$ を T の核, $\mathrm{null}(T) = \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$ を T の退化次数,
$\mathrm{Im}(T) = \{T(\boldsymbol{u}) \mid \boldsymbol{u} \in U\}$ を T の像, $\mathrm{rank}(T) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$ を T の階数といふ.
(10) $\varphi_A(t) = |tI - A|$ を A の固有多項式と称する.
(11) $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ （あるいは $T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$）となる scalar λ と $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ が存在するとき, それぞれを A の（あるいは T の）固有値, 固有値 λ に対する固有 vector と称する.
(12) $W(\lambda, A) = \{\boldsymbol{u} \mid A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}\}$ を λ に対する A の固有空間と称する.
(13) $W(\lambda, T) = \{\boldsymbol{u} \mid T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}\}$ を λ に対する T の固有空間と称する.
(14) λ が A の固有値であるためには $\varphi_A(\lambda) = 0$ であることが必要十分.
(15) Cayley-Hamilton の定理 : $\varphi_A(A) = O$, $\varphi_T(T) = O$.
(16) Vector 空間 V 線形変換 T の V の適当な基に関する表現行列 A に対し $\varphi_T(t) = \varphi_A(t)$ と定め, これを T の固有多項式と呼ぶ. $\varphi_T(t)$ は V の基の選び方に依存しない.
(17) ある正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ となるとき, A と B は相似であるといはれる.
(18) 正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき, A は P により対角化されるといふ. またこのとき, A は対角化可能であるといはれる. T の表現行列 A が対角化可能であるとき, T は対角化可能であるといはれる.
(19) A が対角化可能 $\iff \sum_\lambda \dim W(\lambda, A) = n$. 但し, 和は A の固有値 λ のすべてに渡る.
(20) T が対角化可能 $\iff \sum_\lambda \dim W(\lambda, T) = \dim V$. 但し, 和は T の固有値 λ のすべてに渡る.
(21) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}$ が定められてゐて, 第 1 変数についても第 2 変数についても線形性を持ち, さらに任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ について $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$ が成り立ち, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0 \iff \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ を満たすとき, V には内積 (,) が定められてゐるといひ, その様な V を内積空間と称する.
(22) 内積空間 V においては $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}$ なる記法を用いる. これは $\boldsymbol{u}$ の norm と呼ばれる.
(23) 内積空間において $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ となる vectors $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ は直交するといはれ $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ と記される.
(24) 実正方行列 P は ${}^tPP = I$ を満たすとき, 直交行列と呼ばれる. これは $P\,{}^tP = I$ と同値である.
(25) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対して $(T(\boldsymbol{u}), T(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ となるとき T は直交変換であるといはれる.
(26) T が直交変換であることと T の表現行列が直交行列であることは同値.
(27) 実正方行列 P が直交行列であるためには, A の列 vectors の長さが全て 1 でかつ互ひに直交することが必要十分である.
(28) ${}^tA = A$ のとき A は対称行列と称される.
(29) どんな対称行列も直交行列により対角化される.
(30) $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ が実対称行列のとき $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$ で表はされる 2 次曲線は平行移動と直交変換を合せた $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'' + \boldsymbol{d}$ により標準形 $Ax''^2 + By''^2 = 1$ で表される曲線に合同変形される.
(31) $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ が実対称行列のとき, $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + c = 0$ で表はされる 2 次曲面はある直交行列 P で $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$ と変換することにより標準形 $Ax'^2 + By'd'^2 + Cz'^2 = 1$ で表される曲面に合同変形される.
(32) $f_1, \cdots, f_r \in \mathbb{K}[t]$ と $d = d(t) = \gcd(f_1, \cdots, f_r)$ に対して $d = g_1f_1 + \cdots + g_rf_r$ なる $g_1, \cdots, g_r \in \mathbb{K}[t]$ が存在する. この様な g_j は $r > 2$ であつても互除法を繰り返せば求められる.
(33) $\mathbb{K}[t]$ の部分集合 J について $J + J \subset J$ と $J\mathbb{K}[t] \subset J$ が成り立つとき, J は $\mathbb{K}[t]$ の ideal であるといはれる.
(34) V の部分空間 $W_1, \cdots, W_s$ について, 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し $\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \cdots, \boldsymbol{w}_s \in W_s$ が一意的に存在して $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_s$ と書けるとき, V が $W_1, \cdots, W_s$ の直和であるといひ, $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ と記す.
(35) A （あるいは）T に対し $f(A) = O$（あるいは $f(T) = O$）が成り立つ多項式 $f(t) \in \mathbb{K}[t]$ のうち最小次数のものを A の（あるいは T の）最小多項式と呼び $\mu_A(t)$（あるいは $\mu_T(t)$）と記す.
(36) A が T の表現行列であれば $\mu_T(t) = \mu_A(t)$.　$\mu_A(t) \mid \varphi_A(t)$.　$\mu_T(t) \mid \varphi_T(t)$.
(37) $\mu_A(\lambda) = 0 \iff \varphi_A(\lambda) = 0$.　$\mu_T(\lambda) = 0 \iff \varphi_T(\lambda) = 0$.
(38) 線形変換 T が対角化可能 $\iff \mu_T(t)$ は重根を持たない. （もちろん, 行列に関しても対応する主張が成立する. ）
(39) $T_1T_2 = T_2T_1$ のとき, T_1 の各固有空間は T_2 によりそれ自身に写され, T_1 と T_2 に共通の固有 vector が存在する.
（もちろん, 行列に関しても対応する主張が成立する. ）
(40) T_1 と T_2 がともに対角化可能で T_1 の各固有空間が T_2 によりそれ自身に写されるならば, $T_1T_2 = T_2T_1$ となる.
(41) $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ で各 i について, T_i が W_i の線形変換であるとせよ. 各 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_s$ (各 $\boldsymbol{w}_i \in W_i$) について $T(\boldsymbol{v}) = T_1(\boldsymbol{w}_1) + \cdots + T_s(\boldsymbol{w}_s)$ と定められる線形変換 T を $T_1, \cdots, T_s$ の直和と称して $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_s$ と記す.
(42) $A^2 = A$ であるとき A を冪等行列または射影行列と呼ぶ.
(43) $m \in \mathbb{N}$ が存在して $A^m = O$ となるとき A は冪零行列と呼ばれる.