位相の考へ方について

代数と並んで位相（位相空間論）も非常に重要である. 数学を学ぶ学生の方々に向けにて, ひとつ例を挙げて位相的な考へ方がいかに有用かを説明したいと思ふ. 函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ の $x=0$ の廻りでの Taylor 展開を計算するときに

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} \in \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

に気付く.

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})\cdot\cdots\cdot(-\frac{2n-1}{2})}{n!}$$

であるから, 約分した結果, 分母が 2 の冪になることは自明ではない. よく見掛ける証明は分母子に $n!$ を掛けて

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

と変形し, $\binom{2n}{n}$ が自然数であることから結論を得るといふものである. この方法で

$$\binom{-\frac{1}{3}}{n} \in \mathbb{Z}[\tfrac{1}{3}] \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

を示すのは難しい（と思はれる）. しかし, これはもつと一般的な事実の特殊な場合である. 即ち, p を素数とするとき, $a\in\mathbb{Z}_{(p)}$ ならば [1]

$$\binom{a}{n} \in \mathbb{Z}_{(p)}$$

である. これの証明は次の通り. $\mathbb{Z}_p$ と $\mathbb{Q}_p$ をそれぞれ $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Q}$ の p 進完備化とするとき,

$$\mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p, \quad z \mapsto \binom{z}{n}$$

は, 多項式函数であるから（p 進位相で）連続である. また $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}_p$ は稠密な部分集合であり, その像は $\mathbb{Z}$ に含まれる. ゆゑに $\mathbb{Z}_p$ の像は $\mathbb{Z}_p$ に含まれる. 従つて $\mathbb{Z}_p\cap\mathbb{Q}=\mathbb{Z}_{(p)}$ の像は $\mathbb{Z}_{(p)}$ に含まれる. 証明終り.

これより, 上の例は次の様に再証明される. $\binom{-\frac{1}{2}}{n}\in\mathbb{Z}_{(p)}$ があらゆる奇素数 p について成立するので,

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} \in \bigcap_{p\,:\,\text{奇素数}} \mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}].$$

この証明は短くてよくまとまつてゐるが, これで本当に証明されたのだらうか. もしや騙されてゐるのでは, といふ様な気もする. これが現代数学の威力だといふ気もするが, 事の成り立つ本質が見えない感じがして不満である. しかし, この例から位相的な考へ方にも非常に力がある, といふことを感じていただき, その方面を学ぶことを疎かにしないでいただければと念願する.

2018 年 10 月 8 日

Y. Ô.

---

1) $\mathbb{Z}_{(p)}$ は分母が p で割り切れない有理数の全体.