三角関数の因数分解

1. 多項式 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ は $x = 1,\ -2,\ 3$ の 3 つの値で 0 になる. このことから

$$f(x) = c(x-1)(x+2)(x-3)$$

と因数分解される. $x = 0$ としてみると $c = 1$.

2. もう 1 つ. $g(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ については $x = 1$ と $x = 2$ の 2 つの値でしか 0 にならない. しかし $g(x) \div (x-1) = x^2 - 3x + 2$ は $x = 1$ で 0 になるので, $g(x) = (x-1)(x-2)$ がわかり, $f(x) = (x-1)^2(x-2)$ がわかる. この様に重根の場合に要注意！

3. さて表題の三角関数というのは $\sin x$ のこと. 関数 $\sin x$ が 0 になるのは丁度

$$x = n\pi \quad (\ n = \cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ )$$

のときで, $\displaystyle\lim_{x\to n\pi} \frac{\sin x}{x - n\pi} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(x+n\pi)}{t} = \pm 1 \neq 0$ などから, どれも重根ではない. そこで,

$$\sin x = cx(x-\pi)(x+\pi)(x-2\pi)(x+2\pi)(x-3\pi)(x+3\pi)\cdots$$

とならないかと想像を逞しくしてみる. しかし,

$$\frac{\sin x}{x} = c(x-\pi)(x+\pi)(x-2\pi)(x+2\pi)(x-3\pi)(x+3\pi)\cdots \quad (c \neq 0)$$

と書き直してみて $x \to 0$ としてみる（代入できないので極限値で代用する）と左辺は 1 に近付き, 右辺（の絶対値）は $c \neq 0$ だと発散するので, うまく行かない.

4. それなら c を「小まめに調整」してはどうか. つまり各因子が $x = 0$ で左辺の極限値 1 になる様にして

$$\frac{\sin x}{x} = c'\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{3\pi}\right)\cdots \quad (c' \neq 0)$$

と書いてみれば $c' = 1$ がわかる（ 極限 $x \to 0$ による ）. 結局

公式： $\sin x$ の因数分解

$$\begin{aligned}\sin x &= \cdots\left(1 - \frac{x}{3\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)x\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{3\pi}\right)\cdots \\ &= x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots.\end{aligned}$$

を得る. 以上の推論は厳密な証明ではない！　でも, これを数値計算して実験してみると

（ ただし, 右辺は $\left(1 - \dfrac{x^2}{2000000^2\pi^2}\right)$ まで計算 ）

x	$\sin x$	右辺
$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{1}{2} =$ 0.5	0.50000000694$\cdots$
$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}} =$ 0.7071067$\cdots$	0.7071068$\cdots$
$-\dfrac{\pi}{3}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -$0.2955202$\cdots$	$-$0.2955203$\cdots$

5. 最後に, 得られた公式の展開もしてみよう. まず

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots \quad \text{のとき}$$
$$f(0) = a,\quad f'(0) = b,\quad f''(0) = 2c,\quad f'''(0) = 6\,d,\ \cdots$$

となる. 気楽にこれと同じ様に考えて,

	$\sin x$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin x)'' = -\sin x$	$(\sin x)''' = -\cos x$
$x=0$	0	1	0	-1

であることから,

$$\sin x = 0 + 1x + \frac{0}{2}x^2 + \frac{-1}{6}x^3 + \cdots = x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots .$$

一方, 右辺は

$$\begin{aligned}\sin x &= x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^3}\right)\cdots \\ &= x\left(1 - \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}\right)x^2 + \cdots\right) \\ &= x - \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}\right)x^3 + \cdots .\end{aligned}$$

と書けるので, x^3 の係数を比較して

$$-\frac{1}{6} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}.$$

$$\therefore \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

この左辺の級数は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots = 1$$

と似ているが, この方法では求められない無限級数である.

◎ 三角関数も多項式と同じ様に扱ってよさそうである (無限というものを怖がらなくてよい).
数学は「心が広く」「寛容で」「器が大きい」と感じていただけたら光栄である.

大西 良博