

2014 年度 集中講義 「楕円函数論」 (大西) の report 課題

定義 1. 複素平面上の曲線 γ と点 $a \in \mathbb{C}$ について

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a}$$

と書いて、これを γ の a に関する 纏数 (まつわり数) と呼ぶ.

定義 2. γ を領域 Ω 内の閉曲線とせよ. Ω に属さない任意の点 a に対し $n(\gamma, a) = 0$ となるとき, γ は Ω において 0 に homologue であるといふ.

1 $f(x)$ は領域 Ω で定義された有理型函数であるとし, その零点を $\{a_j\}$, 極を $\{b_k\}$ とせよ. このとき, Ω 内の 0 に homologue な閉曲線 γ について

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_j n(\gamma, a_j) - \sum_k n(\gamma, b_k)$$

となることを示せ. (偏角の原理)

2 $f(x)$ は領域 Ω で定義された有理型函数であるとし, その零点を $\{a_j\}$, 極を $\{b_k\}$ とせよ. $g(z)$ を Ω 上の正則函数とせよ. このとき, Ω 内の 0 に homologue な閉曲線 γ について,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_j n(\gamma, a_j) g(a_j) - \sum_k n(\gamma, b_k) g(b_k)$$

となることを示せ. (偏角の原理の一般化)

3 $\Lambda = \omega' \mathbb{Z} + \omega'' \mathbb{Z}$ を \mathbb{C} 内の格子 (階数 2 の \mathbb{Z} 加群) とする. $u \notin \Lambda$ とせよ. このとき

$$\wp(u|\Lambda) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\substack{\ell \in \Lambda \\ \ell \neq 0}} \left\{ \frac{1}{(z - \ell)^2} - \frac{1}{\ell^2} \right\},$$

$$\wp'(u|\Lambda) = -2 \sum_{\ell \in \Lambda} \frac{1}{(z - \ell)^3}$$

は収束することを示せ.

4 g_2, g_3 を講義中に定義した値とする. (このとき $\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3$.)

$$\sigma(u) = u \exp \left\{ - \int_0^u \int_0^u \left(\wp(u) - \frac{1}{u^2} \right) du \right\}$$

の $u = 0$ の周りでの Taylor 展開の u^7 までを g_2, g_3 を用いて書け.

5* Frobenius-Stickelberger の公式

$$(-1)^{(n-1)(n-2)/2} \left(\prod_{j=1}^{n-1} j! \right) \frac{\sigma(\sum_{i=1}^n u^{(i)}) \prod_{i < j} \sigma(u^{(i)} - u^{(j)})}{\prod_j \sigma(u^{(j)})^n}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \wp(u^{(1)}) & \wp'(u^{(1)}) & \cdots & \wp^{(n-2)}(u^{(1)}) \\ 1 & \wp(u^{(2)}) & \wp'(u^{(2)}) & \cdots & \wp^{(n-2)}(u^{(2)}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \wp(u^{(n)}) & \wp'(u^{(n)}) & \cdots & \wp^{(n-2)}(u^{(n)}) \end{vmatrix}.$$

を証明せよ. Kiepert の公式

$$(-1)^{(n-1)} \left(\prod_{j=1}^{n-1} j! \right)^2 \frac{\sigma(nu)}{\sigma(u)^{n^2}} = \begin{vmatrix} \wp'(u) & \wp''(u) & \cdots & \wp^{(n-1)}(u) \\ \wp''(u) & \wp'''(u) & \cdots & \wp^{(n)}(u) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \wp^{(n-1)}(u) & \wp^{(n)}(u) & \cdots & \wp^{(2n-3)}(u) \end{vmatrix}.$$

を証明せよ.

6 一般に $u \in \mathbb{C}$ について記号 u', u'' で $u = u'\omega' + u''\omega''$ で定まる $u', u'' \in \mathbb{R}$ を表す. $\ell \in \Lambda$, $u, v \in \mathbb{C}$ について

$$\chi(\ell) = \exp\left(\frac{1}{2}\ell' + \frac{1}{2}\ell'' + \frac{1}{2}\ell'\ell''\right), \quad L(u, v) = u(v'\ell' + v''\ell'')$$

とする. このとき

$$\sigma(u + \ell) = \chi(\ell)\sigma(u) \exp L(u + \frac{1}{2}\ell, \ell)$$

を

$$\sigma(u + \omega') = -\sigma(u) \exp\{(u + \frac{1}{2}\omega')\eta'\}, \quad \sigma(u + \omega'') = -\sigma(u) \exp\{(u + \frac{1}{2}\omega'')\eta''\}$$

から示せ.