The Convergence Radii of Series Expansions of Functions on an Algebraic Curve*

Yoshihiro Ônishi

1　Bernoulli 数と母函数の収束半径

容易にわかる様に

$$u=\int_{\infty}^{(x,y)}\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

で与へられる函数 $x\mapsto u$ の逆函数は

$$x(u)=\frac{1}{\sin^2(u)}$$

である. これの展開を

$$\frac{1}{\sin^2(u)}=u^{-2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}u^2+\frac{2}{189}u^4+\frac{1}{675}u^6+\frac{2}{10395}u^8+\cdots=\frac{1}{u^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{2n}}{2n}\frac{u^{2n-2}}{(2n-2)!}$$

とおくと, Bernoulli 数 B_{2n} との関係

$$C_{2n}=(-1)^n2^{2n}B_{2n}$$

が知れる. 上の級数の収束半径は π であるので Cauchy の定理により, 次が成り立つ.

命題 1.1　係数 C_{2n} について次の等式が成り立つ：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{2n}}{C_{2n+2}}\right|=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{B_{2n}}{B_{2n+2}}\right|=\pi^2.$$

数値例：

```
 n    C_{2n}/C_{2n+2}/Pi^2
---+-----------------------------------------
90   0.989071038251366120218579234972677595 63
91   0.989189189189189189189189189189189189 19
92   0.989304812834224598930481283422459893 05
93   0.989417989417989417989417989417989417 99
94   0.989528795811518324607329842931937172 78
95   0.989637305699481865284974093264248704 66
96   0.989743589743589743589743589743589743 59
```

* October 1, 2020

2　Bernoulli-Hurwitz の階商極限と収束半径

（準備中）

3　種数 2 の $x(u)$ の展開係数の階商極限と収束半径

曲線 $\mathscr{C}: y^2 = x^5 - 1$ 上の積分

$$u = \int_{\infty}^{(x,y)} \frac{xdx}{2\sqrt{x^5-1}}$$

で与へられる函数 $x \mapsto u$ の逆函数 $x(u)$ の展開を

$$\begin{aligned} x(u) &= u^{-2} + \frac{1}{11}u^8 - \frac{3}{847}u^{18} + \frac{92}{288827}u^{28} - \frac{31991}{911826839}u^{38} + \frac{14997}{3479828957}u^{48} + \cdots \\ &= \frac{1}{u^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{10n}}{10n}\frac{u^{10n-2}}{(10n-2)!} \quad = \frac{\sigma_3(u_3,u_1)}{\sigma_1(u_3,u_1)}\bigg|_{\kappa^{-1}\iota(\mathscr{C}),\ u=u_1} \end{aligned}$$

とおく. 函数論でよく知られた事実をこの場合に書くと:

命題 3.2　函数 $x(u)$ の原点に最も近い特異点が α であるためには

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_{10n}}{C_{10(n+1)}} \right| = |\alpha|^{10}$$

であることが必要十分である.

以下, $\zeta = \exp\left(\frac{2\pi \boldsymbol{i}}{5}\right)$ と記す. 曲線 $\mathscr{C}$ 上の点 $(1,0)$ と $(\zeta^3,0)$ を周回する積分の周期

$$\rho = 2(1+\zeta)\int_0^1 \frac{xdx}{2\sqrt{x^5-1}} = 2(1+\zeta) \times \boldsymbol{i} \cdot 0.3679093980\cdots \tag{3.3}$$

の絶対値

$$1.1905798220\cdots$$

が収束半径であると思はれる.

数値例：実際, 以下の数値例から $|\rho|$ が収束半径である様に感じられる.

```
 n        |C_{10n}/C_{10(n+1)}/rho^10|
---+----------------------------------------
130      1.011580706252120
131      1.011491983282432
132      1.011404609430994
133      1.011318554158210
134      1.011233787839331
135      1.011150281730452
136      1.011068007936015
137      1.010986939377745
```