楕円曲線の等分多項式の超楕円曲線に対する一般化とその行列式表示

大西 良博 （岩手大学 人文社会科学部）

序 文

今回の work shop で話させていただいたことは，Abel 函数に関するものであるが，あまり知られてゐることではなく，しかも既存の，あるいは現在進められてゐる幾多の研究との関係も，あまり明確とは言へない．しかし，その原型は，以下述べるやうに楕円函数論にあり，Frobenius-Stickelberger の公式，あるいは Kiepert や Brioschi の公式として，19 世紀後半から知られてゐた．Frobenius-Stickelberger の公式は Fay により，[**Fay**]，p.33, (44) 式に一般化されてゐて，数理物理学のある分野で注目されてはゐるやうだが，Fay の式と比べると今回，紹介する結果（と予想）ははるかに簡明で美しい．

これらの公式が近い将来，今回の work shop の表題にある《代数曲線論》や《暗号理論》と関連して応用され，発展していくものと期待してゐる．

この報告書では，講演後に筆者が行つた考察を中心に述べるが，講演の内容はすべて，これに含まれる．とくに，この中である予想を述べる．この予想は上記の公式（行列式表示）をあらゆる超楕円曲線へと一般化したものである．種数が小さい場合など，証明が論文のかたちにまとめてあることがらについては，そちらを参照していただくこととし，結果そのものについてはできるだけ詳しく説明する，といふ方針で述べさせていただく．

——— * * * ———

まづ Frobenius-Stickelberger の公式とは楕円函数論における通常の $\sigma(u)$ と $\wp(u)$ に対して，成り立つつぎの等式のことである：

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{n(n-1)/2}1!2!\cdots n!\frac{\sigma(u_0+u_1+\cdots+u_n)\prod_{i<j}\sigma(u_i-u_j)}{\sigma(u_0)^{n+1}\sigma(u_1)^{n+1}\cdots\sigma(u_n)^{n+1}}\\
&=\begin{vmatrix}
1 & \wp(u_0) & \wp'(u_0) & \wp''(u_0) & \cdots & \wp^{(n-1)}(u_0)\\
1 & \wp(u_1) & \wp'(u_1) & \wp''(u_1) & \cdots & \wp^{(n-1)}(u_1)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
1 & \wp(u_n) & \wp'(u_n) & \wp''(u_n) & \cdots & \wp^{(n-1)}(u_n)
\end{vmatrix}
\end{aligned}
\tag{0.1}
$$

（文献：[**FS**]，[**Fr**] 第 I 巻の p.183，[**WW**] の p.458）．

これの極限形として，つぎの Kiepert の公式が得られる．すなはち，上記の $\sigma(u)$ と $\wp(u)$ に対して，

$$(-1)^{n(n-1)/2}(1!2!\cdots(n-1)!)^2\frac{\sigma(nu)}{\sigma(u)^{n^2}}=\begin{vmatrix}\wp'(u) & \wp''(u) & \cdots & \wp^{(n-1)}(u)\\ \wp''(u) & \wp'''(u) & \cdots & \wp^{(n)}(u)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \wp^{(n-1)}(u) & \wp^{(n)}(u) & \cdots & \wp^{(2n-3)}(u)\end{vmatrix}\tag{0.2}$$

（文献：[**K**]，[**Fr**] 第 I 巻の p.186，[**WW**] の p.460）．

簡単な行列式の変形をすれば，(0.1) 式からつぎが得られる：楕円曲線 $y^2=x^3+\cdots$ に対して，

$$\frac{\sigma(u_0+u_1+\cdots+u_n)\prod_{i<j}\sigma(u_i-u_j)}{\sigma(u_0)^{n+1}\sigma(u_1)^{n+1}\cdots\sigma(u_n)^{n+1}}$$
$$=\begin{vmatrix}1 & x(u_0) & y(u_0) & x^2(u_0) & yx(u_0) & x^3(u_0) & \cdots\\ 1 & x(u_1) & y(u_1) & x^2(u_2) & yx(u_2) & x^3(u_1) & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\\ 1 & x(u_n) & y(u_n) & x^2(u_n) & yx(u_n) & x^3(u_n) & \cdots\end{vmatrix}\tag{0.1$'$}$$

（文献：[**WW**] の p.458）．上記 (0.1) 式との対応は $x(u)=\wp(u)$，$y(u)=\frac{1}{2}\wp'(u)$ である．同様に (0.2) 式から

$$\frac{\sigma(nu)}{\sigma(u)^{n^2}}=\begin{vmatrix}x'(u) & y'(u) & (x^2)'(u) & (yx)'(u) & (x^3)'(u) & \cdots\\ x''(u) & y''(u) & (x^2)''(u) & (yx)''(u) & (x^3)''(u) & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\\ x^{(n-1)}(u) & y^{(n-1)}(u) & (x^2)^{(n-1)}(u) & (yx)^{(n-1)}(u) & (x^3)^{(n-1)}(u) & \cdots\end{vmatrix}\tag{0.2$'$}$$

が得られる．これについても $x(u)=\wp(u)$，$y(u)=\frac{1}{2}\wp'(u)$ である．

——— *** ———

この場を借りて，これらの公式と整数論との関はりについて，少しだけ述べさせていただく．

筆者は Gauss 和の符号決定問題，それの Abel 函数の特殊値による積表示なるものに興味を抱き，Cassels によつて予想され，Matthews によつて証明された 3 次と 4 次の Gauss 和を楕円函数の等分点の値の積として表す式（[**M1**]，[**M2**]）の高次への一般化を探る中で，Matthews の証明で鍵となつてゐる Kiepert の公式なるもの (の一形態) を種数の高い場合の Abel 函数に対して一般化できないものか，もしできれば，積表示を一般化する糸口をつかめるのではと期待したのであつた．

その結果，Kiepert の公式とその周辺の一般化は筆者の期待以上のものが得られて，ここに報告する次第である．ちなみに，Gauss 和の積表示への応用については，今のところ，なにも具体的な知見を持つてはゐないので，これは今後の大きな課題である．

Stickelberger は，論文 [**S**] で岩澤理論の出発点ともいへる Stickelberger の定理を与へる 13 年ほど前に，Frobenius と共著の論文 [**FS**] において，Kiepert が [**K**] ですでに与へてゐた等式 (0.2) を膨らませて公式 (0.1) を導いてゐる．

Kiepert の公式 (0.2) は等分多項式（$\psi_n(u)$ と書かれる）の行列式表示であり，それの零点が,（Jacobi 多様体としての）楕円曲線の n 等分点，つまり因子類群のなかで n 倍で消えるものを与へるものであることに Stickelberger は目を付けて，それの代数体，特に 1 の m 分体での類似物が m 次の Gauss 和の m 乗冪であることに気づき，Stickelberger の定理に導かれたのではないだらうか，と筆者は類推してゐる．

Jacobi 多様体が虚数乗法を持つやうな超楕円曲線を考察する場合，有理整数でない代数的整数 n に対する一般 n 等分多項式の行列式表示は Frobenius-Stickelberger 型の公式からなら，それを得ることができるので，Stickelberger の定理は Kiepert の公式よりもむしろ Frobenius-Stickelberger の公式に近いのかも知れない．

高い種数の場合にも，今回報告する一般化された Kiepert 型の公式は，有限体上でもそのまま成り立つので，筆者としては，今度は逆に，今日の Stickelberger の定理のすばらしい展開に対応するものが，有限体上の函数体にもたらされることを期待したい．

ちなみに，上記 Matthews の論文に現れる Kiepert の公式と関係した行列式は，冪乗しない Gauss 和そのものと楕円函数を結びつけるものであり，Kiepert の公式と Stickelberger の定理の関係は相当深いものなのではないかと思はれる．

——— ∗ ∗ ∗ ———

筆者は，当初これらの公式のうち種数 2 に関する結果しか得てをらず，後述する D.G. Cantor による別の形の行列式表示（[**C**]）との関係や種数 3 以上の場合などについては，これらを扱ふつもりはなく，全く別方面の研究に向かつてゐた．そのとき，[**Ô2**] を読んでゐた松谷茂樹氏は種数一般の場合への拡張に関しての重要な指摘とともに，それが可能であることを説明してくださり，筆者をこの研究に引き戻してくださつた．もし彼にさうしてもらはなかつたら，このやうな世界に気づかないで済んでしまつたに違ひない．しかもこの原稿についても，彼に貴重な助言をしていただいた．

記号の約束：変数 z_1，z_2，$\cdots$，z_m に関する Laurent 展開においては，記号

$$(d^\circ(z_1, z_2, \cdots, z_m) \geq d)$$

でもつて，それに現れる，全次数が d 以上のすべての項の和を表すことにする．ただし，煩雑であつたり，誤解の生ずる恐れのない時は単に $(d^\circ \geq 3)$ とか $\cdots$ だけで済ませたりもする．

１．記 号 と 基 本 事 項

１．１．基本的な記号・幾何的な基本的事柄

この節では，記号の説明と代数曲線の基本的な事柄を述べる．いま C を

$$y^2 = \lambda_0 x^{2g+1} + \lambda_1 x^{2g} + \cdots + \lambda_{2g+1} \tag{1.1}$$

で定義される非特異代数曲線とする．これは種数 g の超楕円曲線である．ここで係数 λ_j の付け方は最後にあげた文献，とくに[**B1**]，[**B2**]，[**B3**]，[**Ô1**]，[**Ô2**]，[**Ô3**]，[**MÔ**] とは異なるので注意されたい．J で代数曲線 C の Jacobi 多様体を表す．C 上の第 1 種微分形式をとり

$$\overrightarrow{\omega} = \left(\frac{dx}{2y}, \frac{xdx}{2y}, \cdots, \frac{x^{g-1}dx}{2y} \right)$$

とおく．このとき $\mathbf{C}^g$ の任意の元 $u = (u^{(1)}, \cdots, u^{(g)})$ に対し，g 個の点 P_1，$\cdots$，P_g と ∞ から P_j までの g 個の積分路が存在して，

$$u = \left(\int_\infty^{P_1} + \cdots + \int_\infty^{P_g} \right) \overrightarrow{\omega}$$

つまり

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= \left(\int_\infty^{P_1} + \cdots + \int_\infty^{P_g} \right) \frac{dx}{2y}, \\ u^{(2)} &= \left(\int_\infty^{P_1} + \cdots + \int_\infty^{P_g} \right) \frac{xdx}{2y}, \\ &\cdots\cdots \\ u^{(g)} &= \left(\int_\infty^{P_1} + \cdots + \int_\infty^{P_g} \right) \frac{x^{g-1}dx}{2y} \end{aligned} \tag{1.2}$$

となる．この事実は Jacobi 多様体の構成の際の急所である．周期全体を

$$\Lambda = \left\{ \oint \overrightarrow{\omega} \;\middle|\; \text{あらゆる閉じた路による積分} \right\}$$

と書く．Λ は上記の $\mathbf{C}^g$ 内の格子をなす．また $\iota : C \hookrightarrow J = \mathbf{C}^g/\Lambda$ を

$$P \mapsto \int_\infty^P \overrightarrow{\omega} \mod \Lambda$$

で定められる埋めこみとし，O で J の原点を表す．$\kappa : \mathbf{C}^g \to \mathbf{C}^g/\Lambda$ は modulo Λ による自然な写像とする．したがつて

$$\Lambda = \kappa^{-1}(O)$$

である．$k=0$，1，$\cdots$，g に対して $\Theta^{[k]}$ を $\left(\int_\infty^{P_1}+\cdots+\int_\infty^{P_k}\right)\overrightarrow{\omega}$，の全体とする．ここで P_1，$\ldots$，P_k は C 上の k 個の点である．したがつて $\Theta^{[1]}=\iota(C)$，$\Theta^{[g]}=J$ である．とくに，$\Theta^{[g-1]}$ を標準的 theta 因子（standard theta divisor）と呼ぶ．$\Theta^{[g-1]}$ は単に Θ と書かれることが多い．ここで，$\kappa^{-1}\iota(C)$ （$\subset \mathbf{C}^g$）は C の普遍 Abel 被覆（universal Abelian covering）になつてゐる．$u\in\kappa^{-1}\iota(C)$ のとき，すなはち u が 1 点 $(x,y)\in C$ のみにより，適当な積分路に関して

$$u=\int_\infty^{(x,y)}\overrightarrow{\omega}$$

と書けるとき x と y を u の函数とみて，それぞれを $x(u)$，$y(u)$ と書く．
$\ell\in\Lambda$ のとき，もちろん $x(u+\ell)=x(u)$，$y(u+\ell)=y(u)$ である．ここで，$x(u)$，$y(u)$，$u^{(1)}$，$\cdots$，$u^{(g)}$ の間の関係としてつぎの 2 つの補題は容易に示される（[**Ô1**]）．

補題１．１．上記の記号のもとで

$$x(u)=\frac{1}{{u^{(g)}}^2}+(d^\circ(u^{(g)})\geq 0),$$
$$y(u)=-\frac{1}{{u^{(g)}}^{2g+1}}+(d^\circ(u^{(g)})\geq -2g+1)$$

が成り立つ．

補題１．２．$u\in\kappa^{-1}\iota(C)$ のとき

$$u^{(1)}=\frac{1}{2g-1}{u^{(g)}}^{2g-1}+\cdots,$$
$$u^{(2)}=\frac{1}{2g-3}{u^{(g)}}^{2g-3}+\cdots,$$
$$\cdots\cdots,$$
$$u^{(g-1)}=\frac{1}{3}{u^{(g)}}^{3}+\cdots$$

である．

この報告の表題にある一般化された等分多項式を定義しよう．

定義１．３．整数 $n\geq g$ に対して等分多項式の一般化 $\psi_n(u)$ を次の条件 (a)，(b) を満たす $\kappa^{-1}\iota(C)$ 上の函数として定義する：
(a) $x(u)$ と $y(u)$ の多項式であつて，
(b) その零点の全体は，重複度もこめて 0-cycle $[n]^*\Theta^{[g-1]}\cap\iota(C)$ の O の上に無い成分全体と丁度一致する．

ここで $[n]$ は Jacobi 多様体 J から J 自身への n 倍写像を表してをり，$[n]^*$ はそれの引き戻しを示す．つまり J において，n 倍すると丁度 $\Theta^{[g-1]}$ 上に乗るやうな $\iota(C)$ 上の O 以外の点たちを，零点として持つやうな $\iota(C)$ 上の代数函数のこと．これはもちろん零と異なる定数倍を除いて一意に定まる．

この $\psi_n(u)$ は通常の意味での等分点を探すのにも有効であり，つぎの重要な性質をもつ．

命題１．４．点 $u \mod \Lambda$ が Jacobi 多様体 J の n 等分点となるためには，

$$\psi_n(u) = \psi_{n\pm1}(u) = \cdots = \psi_{n\pm(g-1)}(u) = 0$$

となることが必要十分である．

これについては [**C**] を見られたい．

１．２．超楕円 sigma 函数と超楕円 $\wp$ 函数

$\sigma(u) = \sigma(u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(g)})$ を代数曲線 C に付随した sigma 函数とする．すなはち，格子 Λ に関する Riemann の g 変数（つまり $\mathbf{C}^g$ 上の）の theta 函数のうち丁度 $\Theta^{[g-1]}$ を１位の零点因子として持つやうなものに "適当" な trivial theta 函数を掛けたものとする：

$$\sigma(u) = \text{“Riemann theta 函数”} \times \exp(\text{“}\ u^{(1)},\ \cdots,\ u^{(g)}\ \text{の２次式”}).$$

これは Weirestrass の函数 $\sigma(u)$ のとてもよい一般化になつてゐる．ここで "適当な" trivial theta 函数は

$$\wp_{ij}(u) = -\frac{\partial^2}{\partial u^{(i)} \partial u^{(j)}} \log \sigma(u)$$

で定められる $\frac{1}{2}g(g+1)$ 個の函数のうち，一方の添数が g であるものについてはそれらが基本対称式になるやうに，すなはち

$$\begin{aligned} \wp_{gg}(u) &= x_1 + x_2 + \cdots + x_g, \\ \wp_{g,g-1}(u) &= -(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{g-1}x_g), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \wp_{g1}(u) &= (-1)^{g+1} x_1 x_2 \cdots x_g \end{aligned} \tag{1.3}$$

となるやうにするために掛けられてゐる（[**B2**]）．この意味で函数 $\sigma(u)$ はソリトン理論などに現れる τ 函数よりもはるかに精細なものである．ただし，x_1，$\cdots$，x_g は，各 u に対して

$$u = \left(\int_\infty^{(x_1,y_1)} + \cdots + \int_\infty^{(x_g,y_g)} \right) \overrightarrow{\omega} \tag{1.4}$$

で定められる g 個の C 上の点の x 座標である．また，$\wp_{ijk\cdots r}(u) = \dfrac{\partial}{\partial u^{(i)}} \wp_{jk\cdots r}(u)$ と書く．函数 $\wp_{ijk\ell}(u)$ と $\wp_{ij}(u)$ たちの間に２次の多項式関係が具体的に知られてゐるが（[**B3**]），それは $\sigma(u)$ の満たす微分方程式に他ならない．従つてたとへば $\sigma(u)$ の Taylor 展開を計算することができる．さらに $\sigma_j(u) = \dfrac{\partial}{\partial u^{(j)}} \sigma(u)$，$\sigma_{ij}(u) = \dfrac{\partial^2}{\partial u^{(j)} \partial u^{(j)}} \sigma(u)$，$\cdots$ などと書く．

上記 (1.3) をうまく利用すると $\sigma(u)$，$\sigma_j(u)$，$\sigma_{ij}(u)$，$\cdots$ たちの零点の位置やその位数が比較的容易にわかる．

２．Frobenius-Stickelberger の公式の一般化

２．１．予想される公式

以下でも，C を $y^2=\lambda_0x^{2g+1}+\lambda_1x^{2g}+\cdots$ （$\lambda_0=1$） で与へられる超楕円（または楕円）曲線（種数 g）とし，前節で説明した記号を使ふ．いま，$\sigma_{分子}$ と $\sigma_{分母}$ を下記の表１に従つて定義する．

種数 g	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$\sigma_{分子}$	σ	σ	σ_3	σ_3	σ_{35}	σ_{35}	σ_{357}	σ_{357}	$\cdots$
$\sigma_{分母}$	σ	σ_2	σ_2	σ_{24}	σ_{24}	σ_{246}	σ_{246}	σ_{2468}	$\cdots$

表１

このとき，以下の２つの予想を提示したい．

予想 I （１） $u\in\kappa^{-1}\iota(C)$，$u\notin\kappa^{-1}(O)$ のとき，普遍 **Abel** 被覆 $\kappa^{-1}\iota(C)$ 上の正則函数 $u\mapsto\sigma_{分子}(v-u)$ は $u=v \mod \Lambda$ に 1 位の零点を持ち，$u\in\kappa^{-1}\iota(O)$ で $g-1$ 位の零点を持つて，

$$\sigma_{分子}(v-u)=\sigma_{分母}(v){u^{(g)}}^{g-1}+(u^{(g)}\text{ の高次の項})$$

と展開される．また，この函数はこれら以外には零点を持たない．

（２） 普遍 **Abel** 被覆 $\kappa^{-1}\iota(C)$ 上の正則函数 $u\mapsto\sigma_{分母}(u)$ は，$u\in\kappa^{-1}(O)$ にのみに g 位の零点を持ち，

$$\sigma_{分母}(u)={u^{(g)}}^{g}+(u^{(g)}\text{ の高次の項}).$$

と展開される．またこの函数はこれら以外には零点を持たない．

予想 II （**Frobenius-Stickelberger** 型の公式）

n は $g-1$ 以上の整数とする．点 u_0，u_1，$\cdots$，u_n はすべて $\kappa^{-1}\iota(C)$ に属するものとせよ．このとき

$$\frac{\sigma(u_0+u_1+\cdots+u_n)\prod_{i<j}\sigma_{分子}(u_i-u_j)}{\prod_i\sigma_{分母}(u_i)^{n+1}}$$
$$=(-1)^g\begin{vmatrix}1 & x(u_0) & \cdots & x^g(u_0) & y(u_0) & x^{g+1}(u_0) & yx(u_0) & x^{g+2}(u_0) & \cdots\\ 1 & x(u_1) & \cdots & x^g(u_1) & y(u_1) & x^{g+1}(u_1) & yx(u_1) & x^{g+2}(u_1) & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\\ 1 & x(u_n) & \cdots & x^g(u_n) & y(u_n) & x^{g+1}(u_n) & yx(u_n) & x^{g+2}(u_n) & \cdots\end{vmatrix}$$

が成り立つ．ここで，行列の **size** は $(n+1)\times(n+1)$ である．

これらについて，すでに示されてゐることは以下の通り：

定理 2．1．この予想は $\underline{g=1,\ 2,\ 3}$ のときにはすべて正しくそれぞれ，[FS]，[Ô2]，[Ô3] に述べられてゐる．$g=4,\ 5$ については $\boxed{\text{予想 I}}$ の（２）が正しければ,（１）や $\boxed{\text{予想 II}}$ もすべて正しい．

$\boxed{\text{予想 I}}$ の（２）の前半は比較的容易であると思はれるが,（２）の後半をどう示せばよいか，全くわからない．ここまでで述べたことの順序は，実は全く逆である．つまり，$\boxed{\text{予想 II}}$ を満たすやうな $\sigma_{\text{分子}}$ と $\sigma_{\text{分母}}$ を見つけたい，といふ動機が出発であつて，そのためには $\boxed{\text{予想 I}}$ が成り立つべきであり，そのやうな函数は表１で与へられるであらうと予想したのである．

２．２．提示した予想の根拠

上のやうに予想する根拠を以下に述べていきたい．まづ，手短かに述べれば以下の３つになる．

<u>根拠 (i)</u> 分母子に現れる函数 $u \mapsto \sigma_{\text{分子}}(v-u)$ と $u \mapsto \sigma_{\text{分母}}(u)$ が定義の表のやうに σ 函数の，曲線に依存しないどれか単一の導函数として与へられるに違ひない，といふ感触；

<u>根拠 (ii)</u> さうだとすれば，帰納法による証明をたどるとき，その原点における Laurent 展開の次数のありかたにより，分母子に関する展開が $\boxed{\text{予想 I}}$ になる必要がある；

<u>根拠 (iii)</u> 函数 $\sigma(u)$ の　原点での Taylor 展開で，そのある “重さ” が揃つてゐなければならないこと（これは分母に対する要請）から λ_0 の現れる項を観察して得られたこと．

これらについて詳しく述べるために，つぎの命題を用意する．

命題２．２．（Riemann singularity theorem）
（１）$u \in \kappa^{-1}(\Theta^{[2]})$ かつ $u \notin \kappa^{-1}\iota(C)$ とせよ．このとき g が奇数ならば，$\sigma(v)$, ($v \in \mathbf{C}^g$) のすべての $(g-3)/2$ 次以下の導函数はすべて u で消え，$(g-1)/2$ 次の導函数のうち，少なくともひとつは u で消えない．また g が偶数ならば，$\sigma(v)$, ($v \in \mathbf{C}^g$) のすべての $(g-2)/2$ 次以下の導函数はすべて u で消え，$g/2$ 次の導函数のうち，少なくともひとつは u で消えない．
（２）$u \in \kappa^{-1}\iota(C)$ かつ $u \notin \kappa^{-1}(O)$ とせよ．このとき g が奇数ならば，$\sigma(v)$, ($v \in \mathbf{C}^g$) のすべての $(g-3)/2$ 次以下の導函数はすべて u で消え，$(g-1)/2$ 次の導函数のうち，少なくともひとつは u で消えない．また g が偶数ならば，$\sigma(v)$, ($v \in \mathbf{C}^g$) のすべての $(g-2)/2$ 次以下の導函数はすべて u で消え，$g/2$ 次の導函数のうち，少なくともひとつは u で消えない．

これの証明は [**AGCH**], p.226 にある Riemann singularity theorem と Brill-Noether 行列を詳しく計算することで得られる．

最初に 根拠 (ii) について．$u = u_n$ と書いて，$\boxed{\text{予想 II}}$ の右辺を u のみの函数と見たとき，その $u = (0, \cdots 0)$ における Laurent 展開（g 番目の変数 $u^{(g)}$ に関するもの）の最低次の項は，右下の成分から来るものに他ならず，それは

$$\pm 1/(u^{(g)})^{n+g}$$

である．一方左辺については，まづ，分子の最初の因子 $\sigma(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)$ は $(u =)u_n = (0, \cdots 0)$ に零点を持たない．また $\sigma_{分子}(u_j - u)$ の $u = (0, \cdots, 0)$ の零点の位数は j に依らないとすべきだらうから，それを a とし，分母の因子 $\sigma_{分母}(u)^{n+1}$ の $u_0 = (0, \cdots, 0)$ における零点の位数を $b(n+1)$ とすれば，左辺の Laurent 展開は都合，$1/(u^{(g)})^{b(n+1)-an}$ から始まることとなる．つまり，等式

$$b(n+1) - an = n + g$$

がどんな n についても成り立つて欲しい．そのためには，$b = g$，$a = g - 1$ となるしかないのである．これが，上記 $\boxed{\text{予想 I}}$ にのべた Taylor 展開の初項の次数に対する根拠である．

ここで正純重さなるものを定義しておく．いま，$u^{(j)}$ に関する展開式の各項において λ_j の重さを j とし，$u^{(i)}$ の重さを i としたときのそれらの重さの和をその項の正純重さ（genuine weight）とよぶのである．たとへば，$\lambda_5 {u^{(1)}}^2 {u^{(3)}}^4 u^{(4)}$ の正純重さは $5 + 1 \times 2 + 3 \times 4 + 4 = 23$ である．特に，ソリトン理論との関係を明確にする為には，これと密接に関係する佐藤（幹夫）の重さともいふべきものも説明するべきなのであるが，これはもう少し予想の証明の方針が煮詰まつてきたときにゆづる．

正純重さに関してはつぎのことがわかつてゐる：

命題 2.3.（1） $\sigma(u)$ **は** $g \equiv 1 \mod 4$ **または** $2 \mod 4$ **のとき，奇函数であり，**$g \equiv 3 \mod 4$ **または** $0 \mod 4$ **のときは偶函数となる．**
（2） $\sigma(u)$ **の** $u = (0, \cdots, 0)$ **における Taylor 展開はもし** g **が奇数ならば** $\frac{g+1}{2}$ **次の項から始まり，それらの正純重さはすべて** $\left(\frac{g+1}{2}\right)^2$ **であり，つぎに続く** $\frac{g+1}{2} + 2$ **次の項はすべて正純重さ** $\left(\frac{g+1}{2}\right)^2 + (2g+1)$**，さらに** $\frac{g+1}{2} + 4$ **次の項がすべて正純重さ** $\left(\frac{g+1}{2}\right)^2 + 2(2g+1)$ **で続く．以下同様に続く．もし，**g **が偶数ならば，**$\frac{g}{2}$ **次から始まつて，その正純重さは** $\left(\frac{g}{2}\right)^2$ **であり，つぎに続く** $\frac{g}{2} + 2$ **次の項はすべて正純重さ** $\left(\frac{g}{2}\right)^2 + (2g+1)$**，さらに** $\frac{g}{2} + 4$ **次の項がすべて正純重さ** $\left(\frac{g}{2}\right)^2 + 2(2g+1)$ **で続く．以下同様に続く．いづれの場合も，最低次の項については [B2] において完全に決定されてゐる．**

上記のことはすべて [**B2**] と [**B3**] を詳しく見ることで得られる．

先に述べたとおり，種数 3 までは予想はすべて証明されてゐる（定理２．１）ので，以後で種数 4，5 について述べていく．

２．３．種数４の場合

ここでは $g=4$ について述べる． $g=3$ の時と同様に $\Theta^{[2]}$ の上で恒等的には消えない 1 次導函数は σ_3 のみであつて，$\sigma_{分子}(u_i-u_j)$ は $\sigma_3(u_i-u_j)$ 以外には考へられない．いま，v，u が (1.4) によつて，それぞれ (x_1,y_1)，(x_2,y_2) に対応するとき，前節の $\wp_{jg}(u)$ に関する式 (1.3) や $\sigma_j(v-u)$ が恒等的に消えること（命題２．２ からわかる），補題１．２，および (1.3) などを使つて [**G**] などに使はれてゐるのと同様な計算技巧により

$$
\begin{aligned}
\frac{\sigma_3}{\sigma_2}(v-u) &= \frac{\sigma_3\sigma_4-\sigma_{34}\sigma}{\sigma_2\sigma_4-\sigma_{24}\sigma}(v-u)\\
&= \frac{\wp_{34}}{\wp_{24}}(v-u)\\
&= -\frac{1}{x_1+x_2} = -\frac{1}{x_1+\left(\frac{1}{{u^{(4)}}^2}+\cdots\right)}\\
&= -{u^{(4)}}^2+\cdots
\end{aligned}
$$

となることと

$$
\begin{aligned}
\sigma_2(v-u) &= -\left\{\sigma_{21}(v)u^{(4)}+\sigma_{22}(v)u^{(4)}+\sigma_{23}(v)u^{(4)}+\sigma_{24}(v)u^{(4)}\right\}u^{(4)}+\cdots\\
&= -\Bigg\{\sigma_{21}(v)(\frac{1}{7}{u^{(4)}}^7+\cdots)+\sigma_{22}(v)(\frac{1}{5}{u^{(4)}}^5+\cdots)\\
&\qquad +\sigma_{23}(v)(\frac{1}{3}{u^{(4)}}^3+\cdots)+\sigma_{24}(v)u^{(4)}\Bigg\}+\cdots\\
&= -\sigma_{24}(v)u^{(4)}+\cdots
\end{aligned}
$$

とを合はせて

$$
\sigma_3(v-u)=\sigma_{24}(v){u^{(4)}}^3+(d^\circ(u^{(4)})\geq 4)
$$

となり，表 1 の $g=4$ の分母の欄は $\sigma_{24}(u)$ となるべきであつて，これらの函数に関して $\boxed{\text{予想 I}}$ の展開の形が得られるのである．

根拠 (iii) については，命題２．３によるのである．まづ，命題２．３よりたとへば，$g=4$ ならば $\sigma(u)$ は偶函数であり，その原点での Taylor 展開の最低次の部分は 2 次で，$u^{(1)}u^{(3)}-{u^{(2)}}^2$ である（[**B2**]）．つぎにくる 4 次の項はすべて正純重さ $4+9=13$ であり，さらに 6 次の項の正純重さはどれも $4+9\times 2=22$ である．厳密な確認はしてゐないが，4 次の項の中に

$$
\lambda_0 u^{(2)}u^{(3)}{u^{(4)}}^2
$$

（の簡単な有理数倍）が現れることは確実であり，この項と 6 次の項に現れるはずの

$$\lambda_0 u^{(2)} {u^{(4)}}^5$$

とのおかげで，

$$\sigma_{24}(u) = {u^{(4)}}^4 + (d^\circ(u^{(4)}) \geq 6)$$

となるはずである．$\sigma_{24}(u)$ ともうひとつの例外を除けば，他の $\sigma_{ij}(u)$ の展開の初項には，命題２．３により，どうしても λ_0 以外の λ_j が現れてきて，超楕円曲線に依らない形にならないので，それらの $\sigma_{ij}(u)$ は $\sigma_{分母}(u)$ の候補とはなり得ない．その例外とは $\sigma_{33}(u)$ であつて，もしも恒等的には $\sigma_{33}(u)=0$ でないならば，これの展開のなかに

$$\lambda_0 {u^{(3)}}^3 u^{(4)} \quad (4\text{ 次で正純重さ }13), \qquad \lambda_0 {u^{(3)}}^2 {u^{(4)}}^4 \quad (6\text{ 次で正純重さ }22)$$

などが現れるはずである．ところが，どんな $u \in \kappa^{-1}\iota(C) - \kappa^{-1}(O)$ についても，$\boxed{\text{予想 I}}$ にあるやうに期待通り $\sigma_{24}(u) \neq 0$ であるのならば，以下のやうにして，$u \in \kappa^{-1}\iota(C)$ について恒等的に

$$\sigma_{24}(u) = \frac{1}{3}\sigma_{3444}(u) + \frac{1}{6}\sigma_{33}(u)$$

が成り立つことがわかる．すなはち，先ほどと同様に，u，v が写像 ι によつて，それぞれ (x_1, y_1)，(x_2, y_2) に対応してゐるとすると，u を固定したとき

$$\frac{1}{x_1 + x_2} = {v^{(4)}}^2 + (d^\circ(v^{(4)}) \geq 3)$$

である．一方，命題２．２より $\kappa^{-1}(\Theta^{[2]})$ 上ではすべて１次導函数 $\sigma_j(u)$ が消えてゐるので v に関して展開すると

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{x_1 + x_2} \\
&= \frac{\sigma_3(u+v)}{\sigma_2(u+v)} \\
&= \Bigg[\Bigg\{\sigma_{34}(u)v^{(4)} + \boxed{\sigma_{33}(u)}\left(\frac{1}{3}{v^{(4)}}^3 + \cdots\right) + \sigma_{32}(u)\left(\frac{1}{5}{v^{(4)}}^5 + \cdots\right) \\
&\qquad + \sigma_{31}(u)\left(\frac{1}{7}{v^{(4)}}^7 + \cdots\right)\Bigg\} + \frac{1}{2}\sigma_{344}(u){v^{(4)}}^2 + \frac{1}{6}\boxed{\sigma_{3444}(u)}{v^{(4)}}^3 + \cdots\Bigg] \\
&\qquad\quad \Bigg/ \Bigg\{\boxed{\sigma_{24}(u)}v^{(4)} + \sigma_{23}(u)\left(\frac{1}{3}{v^{(4)}}^3 + \cdots\right) + \sigma_{22}(u)\left(\frac{1}{5}{v^{(4)}}^5 + \cdots\right) \\
&\qquad\qquad + \sigma_{21}(u)\left(\frac{1}{7}{v^{(4)}}^7 + \cdots\right) + \cdots\Bigg\}
\end{aligned}$$

となる．これら２式をつないだ式が $v^{(4)}$ を変数として

$$v^{(4)2}+\cdots=\frac{\left(\frac{1}{3}\sigma_{33}(u)+\frac{1}{6}\sigma_{3444}(u)\right)v^{(4)3}+\cdots}{\sigma_{24}(u)v^{(4)}+\cdots}$$

となつてゐなくてはいけないので，$u\in\kappa^{-1}\iota(C)$ のとき

$$\sigma_{34}(u)=0,\quad \sigma_{344}(u)=0,\quad \sigma_{24}(u)=\frac{1}{3}\sigma_{3444}(u)+\frac{1}{6}\sigma_{33}(u)$$

などとなることがわかるのである．$\sigma_{33}(u)$ の存在により支障をきたすといふことは，恐らくないであらう．

２．４．種数５の場合

ここでは $g=5$ の場合の根拠について触れる．まづ根拠 (iii) に着目する．函数 $\sigma(u)$ の原点での展開の最小次数の部分は 3 次式で，それは [**B2**] により

$$u^{(1)}u^{(3)}u^{(5)}+\cdots$$

なる正純重さ 9 のいくつかの項からなる．つぎに命題２．２により，正純重さ $9+11=20$ の 5 次の項が続き，さらに，正純重さ $9+2\times 11=31$ の 5 次の項が続く．１次の導函数 $\sigma_j(u)$ は命題２．２より，すべて，$\kappa^{-1}\iota(C)$ 上で消えてゐる．そこで天下り的だがはじめの表に従ひ $\sigma_{24}(u)$ を考へる．これの展開には $u^{(2)}u^{(3)}u^{(4)}$ による $u^{(3)}$（$=\frac{1}{5}u^{(5)5}+\cdots$）と $\lambda_0u^{(2)}u^{(4)2}u^{(5)2}$（5 次で正純重さ 20）や $\lambda_0u^{(2)}u^{(4)}u^{(5)5}$ （7 次で正純重さ 31）により $u^{(5)5}$ の項が最低次の項として現れるはずである．これ以外に $u^{(5)5}$ への寄与はないことは容易にわかる．

ここで $g=4$ のときと同様に $\sigma_{33}(u)$ もひとつの候補でありそうに思はれるし，さらに $\sigma_{15}(u)$ もさう思はれる．まづ，$\sigma_{33}(u)$ については

$$\begin{aligned}
v^{(5)2}+\cdots&=\frac{1}{x_1+x_2}=\frac{\sigma_3(u+v)}{\sigma_2(u+v)}\\
&=\Bigg\{\sigma_{35}(u)v^{(5)}+\frac{1}{2}\sigma_{355}(u)\left(\frac{1}{5}v^{(5)2}+\cdots\right)+\sigma_{34}(u)\left(\frac{1}{3}v^{(5)3}+\cdots\right)\\
&\qquad+\frac{1}{6}\sigma_{3555}(u)v^{(5)3}+\frac{1}{2}\sigma_{345}(u)\left(\frac{1}{3}v^{(5)4}+\cdots\right)+\frac{1}{24}\sigma_{35555}(u)v^{(5)4}\\
&\qquad\quad+\sigma_{33}(u)\left(\frac{1}{5}v^{(5)5}+\cdots\right)+\frac{1}{6}\sigma_{3455}(u)\left(\frac{1}{3}v^{(5)5}+\cdots\right)+\cdots\Bigg\}\\
&\qquad\qquad\Bigg/\Bigg\{\sigma_{25}(u)v^{(5)}+\sigma_{255}(u)v^{(5)2}+\boxed{\sigma_{24}(u)}v^{(5)3}+\cdots\Bigg\}
\end{aligned}$$

であることと，後ほど示す $\sigma_{25}(u)=\sigma_{255}(u)=0$ により

$$\sigma_{35}(u)=\sigma_{355}(u)=\sigma_{34}(u)+\frac{1}{6}\sigma_{3555}(u)=\sigma_{345}(u)+\frac{1}{12}\sigma_{35555}(u)=0$$

などがわかり，これらを上の式に再度代入すれば

$$\sigma_{33}(u)+\frac{1}{6}\sigma_{3455}(u)=0$$

がわかる．また $\sigma_{15}(u)$ については

$$\begin{aligned}
&-x_1+(d^\circ(v^{(5)})\geq 1)\\
&=-\frac{x_1x_2}{x_1+x_2}\\
&=\frac{\sigma_1(u+v)}{\sigma_2(u+v)}\\
&=\frac{\sigma_{15}(u)v^{(5)}+\frac{1}{2}\sigma_{155}(u){v^{(5)}}^2+\sigma_{154}(u)\left(\frac{1}{3}{v^{(5)}}^3+\cdots\right)+\sigma_{1555}(u){v^{(5)}}^3+\cdots}{+\sigma_{25}(u)v^{(5)}+\sigma_{255}(u){v^{(5)}}^2+\boxed{\sigma_{24}(u)}\left(\frac{1}{3}{v^{(5)}}^3+\cdots\right)+\cdots}
\end{aligned}$$

より

$$\sigma_{15}(u)=\sigma_{155}(u)=0$$

を得るので $\sigma_{15}(u)$ は不適当である．

他には $\boxed{\text{予想 I}}$ の（２）を満たしてくれそうな第２次導函数はない．それゆゑ，$\sigma_{\text{分母}}(u)$ は $\sigma_{24}(u)$ だと信じよう．このとき，$\sigma_{\text{分子}}(u)$ が表１の通り $\sigma_{35}(u)$ であらうことは，以下に述べる計算から大いに期待できるのである．まづ命題２．２より，任意の u，$v\in\kappa^{-1}\iota(C)$ について $\sigma_2(u+v)=0$ が成り立つ．しかるに Taylor 展開して，補題１．２を使へば

$$\begin{aligned}
\sigma_2(u+v)=&\left\{\sigma_{25}(u)v^{(5)}+\sigma_{24}(u)\left(\frac{1}{3}{v^{(5)}}^3+\cdots\right)+\sigma_{23}(u)\left(\frac{1}{5}{v^{(5)}}^5+\cdots\right)\right.\\
&\left.+\sigma_{22}(u)\left(\frac{1}{7}{v^{(5)}}^7+\cdots\right)+\sigma_{21}(u)\left(\frac{1}{9}{v^{(5)}}^9+\cdots\right)\right\}\\
&+\frac{1}{2}\sigma_{255}(u){v^{(5)}}^2+\frac{1}{6}\sigma_{2555}(u){v^{(5)}}^3+\cdots
\end{aligned}$$

であるから，すべての $u\in\kappa^{-1}\iota(C)$ に対して

$$\sigma_{25}(u)=0,\quad \sigma_{255}(u)=0,\quad \sigma_{2555}(u)=-2\sigma_{24}(u)$$

などが導かれる．一方 v_1，v_2，u が写像 ι によつて，それぞれ (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3) に対応してゐるとせよ．このとき $-v_2$，$-u$ はそれぞれ $(x_2,-y_2)$，$(x_3,-y_3)$ に対応してゐて

$$\begin{aligned}
-{v_1^{(5)}}^2+\cdots&=-\frac{1}{x_1+x_2}\\
&=\lim_{(x_3,-y_3)\to\infty}\frac{-x_1-x_2-x_3}{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}\\
&=\lim_{u\to(0,\cdots,0)}\frac{\sigma_3}{\sigma_2}(v_1-v_2-u)\\
&=\lim_{u\to(0,\cdots,0)}\frac{\sigma_{35}(v_1-v_2)u^{(5)}+(d^\circ(u^{(5)})\geq 2)}{\sigma_{25}(v_1-v_2)u^{(5)}+(d^\circ(u^{(5)})\geq 2)}\\
&=\frac{\sigma_{35}}{\sigma_{25}}(v_1-v_2),
\end{aligned}$$

つまり，記号を換へれば

$$\frac{\sigma_{35}}{\sigma_{25}}(v-u) = -u^{(5)2} + (d^\circ(u^{(5)}) \geq 3)$$

が成り立つ．また

$$\sigma_{25}(v-u) = -\sigma_{255}(v)u^{(5)} + \frac{1}{2}\sigma_{2555}(v)u^{(5)2} + (d^\circ(u^{(5)}) \geq 3)$$

であるから，先の $\sigma_{24}(u)$ との関係から

$$= \sigma_{24}(v)u^{(5)2} + (d^\circ(u^{(5)}) \geq 3)$$

がわかり，これらのことから

$$\sigma_{35}(v-u) = \sigma_{24}(v)u^{(5)4} + (d^\circ(u^{(5)}) \geq 5)$$

を得るが，これが $\boxed{\text{予想 I}}$ の（1）の式である．

以上のことより，$g=5$ についても予想が確からしいことがお分かりいただけたと思ふ．

３．一般化された等分多項式の行列式表示

引き続き C は $y^2=\lambda_0 x^{2g+1}+\cdots$ で与へられる超楕円曲線とせよ.

３．１．Kiepert の公式の一般化

実は，前節の $\boxed{\text{予想 II}}$ の "極限" は任意の種数で正しくて，つぎのことが成り立つ.

定理 3.1. （任意の種数についての **Kiepert** 型の公式，文献：[**MÔ**]）
$n\geq g$ は整数とする．j を $\{1,2,\cdots,g\}$ の中から任意に選ぶ．$\kappa^{-1}\iota(C)$ 上の函数として $\psi_n(u)$ は

$$x^{(j-1)n(n-1)/2}\times\begin{vmatrix} x' & (x^2)' & \cdots & (x^g)' & y' & (x^{g+1})' & (yx)' & (x^{g+2})' & \cdots \\ x'' & (x^2)'' & \cdots & (x^g)'' & y'' & (x^{g+1})'' & (yx)'' & (x^{g+2})'' & \cdots \\ x''' & (x^2)''' & \cdots & (x^g)''' & y''' & (x^{g+1})''' & (yx)''' & (x^{g+2})''' & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ x^{(n-1)} & (x^2)^{(n-1)} & \cdots & (x^g)^{(n-1)} & y^{(n-1)} & (x^{g+1})^{(n-1)} & (yx)^{(n-1)} & (x^{g+2})^{(n-1)} & \cdots \end{vmatrix}(u)$$

の定数倍である．ここで $'$，$''$，$\cdots$，${}^{(n-1)}$ は $\frac{d}{du^{(j)}}$，$\left(\frac{d}{du^{(j)}}\right)^2$，$\cdots$，$\left(\frac{d}{du^{(j)}}\right)^{n-1}$ を表す.

この定理の厳密な証明は今のところ，つぎの節で述べる Cantor の行列式表示から導く方法（松谷茂樹により与へられたもの）しかない．ただし，両辺の零点は重複度を無視すればすべて一致することと，両辺の零点の重複度を込めた総数が一致することは比較的容易，かつ直接的に示すことができる（[**MÔ**] を参照されたい）.

３．２．Brioschi の公式の一般化（Cantor の公式）

定理３．２．（文献：[**Br**]，[**C**]）
r を $(n+g-1)/2$ を越えない最大の整数とし， $s=n-1-r$ とする．このとき定理３．１の行列式を含んだ式を $(1!2!\cdots(n-1)!)$ で除したものを正式な $\psi_n(u)$ とすると，

$$\psi_n(u)=(-1)^{(s+2)(s-1)/2}(2y)^{n(n+1)/2}$$
$$\times\begin{cases}\begin{vmatrix}\dfrac{y^{\langle g+2\rangle}}{(g+2)!} & \dfrac{y^{\langle g+3\rangle}}{(g+3)!} & \cdots & \dfrac{y^{\langle r+1\rangle}}{(r+1)!}\\ \dfrac{y^{\langle g+3\rangle}}{(g+3)!} & \dfrac{y^{\langle g+4\rangle}}{(g+4)!} & \cdots & \dfrac{y^{\langle r+2\rangle}}{(r+2)!}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{y^{\langle r+1\rangle}}{(r+1)!} & \dfrac{y^{\langle r+2\rangle}}{(r+2)!} & \cdots & \dfrac{y^{\langle n-1\rangle}}{(n-1)!}\end{vmatrix}, & (n\not\equiv g \mod 2 \text{ のとき})\text{；}\\ \\ \begin{vmatrix}\dfrac{y^{\langle g+1\rangle}}{(g+1)!} & \dfrac{y^{\langle g+2\rangle}}{(g+2)!} & \cdots & \dfrac{y^{\langle r+1\rangle}}{(r+1)!}\\ \dfrac{y^{\langle g+2\rangle}}{(g+2)!} & \dfrac{y^{\langle g+3\rangle}}{(g+3)!} & \cdots & \dfrac{y^{\langle r+2\rangle}}{(r+2)!}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{y^{\langle r+1\rangle}}{(r+1)!} & \dfrac{y^{\langle r+2\rangle}}{(r+2)!} & \cdots & \dfrac{y^{\langle n-1\rangle}}{(n-1)!}\end{vmatrix}, & (n\equiv g \mod 2 \text{ のとき})\end{cases}$$

である．ここで ${}^{\langle k\rangle}$ は $\left(\frac{d}{dx}\right)^k$ を表す．また行列の **size** はいづれも $s\times s$ である．

４．Grant 型の公式の一般化

一般等分多項式 $\psi_n(u)$ を $\sigma(u)$ とその導函数で表すことを考へよう．そのためにまづ，つぎのことが必要である．

$\boxed{\text{予想 III}}$ u，v が $\kappa^{-1}\iota(C)$ に属するとき，等式

$$(-1)^g \frac{\sigma_{\text{分子}}(u+v)\sigma_{\text{分子}}(u-v)}{\sigma_{\text{分母}}(u)^2\sigma_{\text{分母}}(v)^2} = x(u) - x(v)$$

が成り立つ．

これが $\boxed{\text{予想 II}}$ を n に関する帰納法で証明する際，第 1 段階を与へる式になる．

補題４．１．もし $\boxed{\text{予想 III}}$ が正しいならば

$$\lim_{u^{(1)}\to v^{(1)}} \frac{\sigma_{\text{分子}}(u-v)}{u^{(1)} - v^{(1)}} = 1.$$

が成り立つ．

証明は [**Ô2**] や [**Ô3**] の Lemma 3.1 と同様である．これらのことを前提とすれば，つぎのことが成り立つ．

定理４．２．（Grant 型の式）いま $n \geq g$ を整数とせよ．$\boxed{\text{予想 III}}$ が正しいとする．このとき $\kappa^{-1}\iota(C)$ 上の函数として，$\psi_n(u)$ は $\sigma(nu)/\sigma_{\text{分母}}(u)^{n^2}$ と一致する．

種数が 1 のときは楕円函数のほとんどの教科書に書かれてゐる．種数 2 と 3 については [**G**]，[**Ô2**]，[**Ô3**] を見られたい．$\boxed{\text{予想 III}}$ から上のことを導くのは，ほとんど同様な議論による．

５．代数的加法公式のもととなる公式（参考）

いま，u と v はともに $\mathbf{C}^g$ 上を動く変数とせよ．このとき $\dfrac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2}$ は $g(g+1)/2$ 個の関数 $\wp_{ij}(u)$, $\wp_{ij}(v)$ の $\mathbf{Q}$ 上の多項式として表されることが H.F Baker らにより知られてゐる（[**B2**]，[**BEL**]）．たとへば

● $g=1$ のときは

$$\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2}=\wp_{11}(v)-\wp_{11}(u),$$

● $g=2$ のときは

$$\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2}=\wp_{11}(u)-\wp_{11}(v)+\wp_{12}(u)\wp_{22}(v)-\wp_{12}(v)\wp_{22}(u),$$

● $g=3$ のときは

$$\begin{aligned}\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2}&=\left(\wp_{31}(u)-\wp_{31}(v)\right)^2-\left(\wp_{33}(u)-\wp_{33}(v)\right)\left(\wp_{11}(u)-\wp_{11}(v)\right)\\&+\left(\wp_{21}(u)-\wp_{21}(v)\right)\left(\wp_{23}(u)-\wp_{23}(v)\right)-\left(\wp_{22}(u)-\wp_{22}(v)\right)\left(\wp_{31}(u)-\wp_{31}(v)\right).\end{aligned}$$

● $g=4$ のときは

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2}\\&=\left(\wp_{42}(v)\wp_{41}(u)-\wp_{42}(u)\wp_{41}(v)-\wp_{11}(v)+\wp_{11}(u)\right)\\&\qquad\times\left(\wp_{44}(v)\wp_{43}(u)-\wp_{44}(u)\wp_{43}(v)+\wp_{42}(v)-\wp_{42}(u)-\wp_{33}(v)+\wp_{33}(u)\right)\\&-\left(\wp_{43}(v)\wp_{41}(u)-\wp_{43}(u)\wp_{41}(v)-\wp_{21}(v)+\wp_{21}(u)\right)\\&\qquad\times\left(\wp_{44}(v)\wp_{42}(u)-\wp_{44}(u)\wp_{42}(v)+\wp_{41}(v)-\wp_{41}(u)-\wp_{32}(v)+\wp_{32}(u)\right)\\&-\left(\wp_{44}(v)\wp_{41}(u)-\wp_{44}(u)\wp_{41}(v)-\wp_{31}(v)+\wp_{31}(u)\right)\\&\qquad\times\left(\wp_{43}(v)\wp_{42}(u)-\wp_{43}(u)\wp_{42}(v)+\wp_{31}(v)-\wp_{31}(u)-\wp_{22}(v)+\wp_{22}(u)\right)\end{aligned}$$

文献

[**ACGH**] *E. Arbarello, M. Cornalba, P.A. Griffiths and J. Harris*, Geometry of algebraic curves, Vol.1, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 267, Springer, Berlin, 1984.

[**B1**] *H.F. Baker*, Abelian functions — Abel's theorem and the allied theory including the theory of the theta functions —, Cambridge Univ. Press, 1897; reprint, 1995.

[**B2**] *H.F. Baker*, On the hyperelliptic sigma functions, Amer. J. of Math. **20** (1898), 301-384.

[**B3**] *H.F. Baker*, On a system of differential equations leading to periodic functions, Acta math. **27** (1903), 135-156.

[**BEL**] *V.M. Buchstaber, V.Z. Enolskii and D.V. Leykin*, Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications, Reviews in Math. and Math. Physics **10** (1997), 1-125.

[**Br**] *F. Brioschi*, Sur quelques formules pour la multiplication des fonctions elliptiques, C. R. Acad. Sci. Paris **59** (1864), 769-775.

[**C**] *D.G. Cantor*, On the analogue of the division polynomials for hyperelliptic curves, J. reine angew. Math. **447** (1994), 91-145.

[**Fay**] *J. Fay*, Theta functions on Riemann surfaces, Lecture Notes in Math., 352, Springer-Verlag, 1973.

[**Fr**] *R. Fricke*, Die elliptishen Functionen und ihre Anwendungen, I, II, Teubner, 1916, 1922.

[**FS**] *F.G. Frobenius and L. Stickelberger*, Zur Theorie der elliptischen Functionen, J. reine angew. Math. **83** (1877), 175–179.

[**G**] *D. Grant*, A generalization of a formula of Eisenstein, Proc. London Math. Soc. **62** (1991), 121–132.

[**H**] *L. Heffter*, Ludwig Stickelberger, Deutshesche Math. Jahr. **47** (1937), 79–86.

[**K**] *L. Kiepert*, Wirkliche Ausführung der ganzzahligen Multiplikation der elliptichen Funktionen, J. reine angew. Math. **76** (1873), 21–33.

[**MÔ**] *S. Matsutani and Y. Ônishi*, Determinant expression for hyperelliptic functions, with Appendix by S. Matsutani, Preprint, http://arxiv.org/abs/math.NT/0105189 (2001).

[**M1**] *C.R. Matthews*, Gauss sums and elliptic functions : I. The Kummer Sum, Invent. math. **52** (1979), 163–185.

[**M2**] *C.R. Matthews*, Gauss sums and elliptic functions : II. The Quartic Sum, Invent. math. **54** (1979), 23–52.

[**Mu**] *D. Mumford*, *Abelian varieties,*, Oxford Univ. Press, 1985.

[**Ô1**] *Y. Ônishi*, Complex multiplication formulae for hyperelliptic curves of genus three, (A list of its correction is available from http://jinsha.iwate-u.ac.jp/˜kankyou/onishi/sup.ps), Tokyo J. Math. **21** (1998), 381–431.

[**Ô2**] *Y. Ônishi*, Determinant expressions for Abelian functions in genus two, Preprint, http://arxiv.org /abs/math.NT/0105188 (2000).

[**Ô3**] *Y. Ônishi*, Determinant expressions for hyperelliptic functions in genus three , Preprint, http://arxiv.org/abs/math.NT/0105187 (2001).

[**S**] *L. Stickelberger*, Über eine Verallgemeinerung der Kreistheilung, Math. Ann. **37** (1890), 321–367.

[**W**] *H. Weber*, Lehrbuch der Algebra III, F. Vieweg, 1908; Chelsea, 1961.

[**WW**] *E.T. Whittaker and G.N. Watson*, A course of modern analysis , Cambridge Univ. Press, 1902.