Determinant Expressions in Abelian Functions for Purely Pentagonal Curves of Degree Six*

Shigeki Matsutani and Yoshihiro Ônishi

Abstract

We propose the conjecture of an ultimate form of Frobenius-Stickelberger-type deteminantal formula for any purely d-gonal curve with unique point at infinity. Adding to several cases in which the conjecture was shown by the authors theirselves, this paper shows the conjecture for the curve $y^5 = x^6 + \lambda_5 x^5 + \lambda_{10} x^4 + \cdots + \lambda_{25} x + \lambda_{30}$, which is of genus 10.

Introduction

この論文では Frobenius-Stickelberger 型の行列式表示式についての精密な予想 6.1 を

$$y^5 = x^6 + \lambda_5 x^5 + \lambda_{10} x^4 + \cdots + \lambda_{25} x + \lambda_{30} \quad (lambda_j \text{ は定数})$$

で定義される代数曲線 (purely d-gonal curve with unique point at infinity) に対して証明する．ここでの証明は $d \leqq 4$ の場合はもちろん, $d = 5$ でこの論文で扱はなかつた場合や $d \geqq 6$ の場合でも (結果が予想通りであれば) 通用する．しかし, 一般の場合について一気になされるべき証明は完成してをらず, やむを得ずその予想を支持するひとつの, しかし強力な, 例としてこの記録を提出する．一般の場合の証明が完成すれば, もつと美しく（しかも短かく）まとめられるものと信じてゐる．しかし, この記録では, そのための材料を多く示すことも意図してゐる．それゆゑ, 余計なことも盛り込んであると感じられるかも知れないし, 数字の現れ方をうまく説明できないで, 直接的に説明しただけの箇所も多い．一般的な証明を得るためには Riemann singularity theorem の精密化が必要であり, 現在はそれを鋭意考察してゐる．

命題 7.9 がこの論文の主結果を証明する要である．実際, 主結果の証明は超楕円曲線の場合の [Ô4] とは随分異なつてゐる．また trigonal curves の場合の [Ô5] の方法も適用できなかつた．それで, 本論文では, まづ $\sigma_\flat$ の基本性質を導いておき (命題 7.9), 最初に変数の個数 n が 2 の場合を証明する (系 7.19). 次に n が種数に等しい場合を証明し, その後, 順に n を減らしながら帰納的に証明する．最後に種数より大きな n について [Ô2], [Ô3], [Ô4], [Ô5] と同様の方針の帰納法で証明する．

*This work was partially supported by JSPS grant-in-aid for scientific researches, No.16540002 and No.19540002.

最後に, 詳しくは述べないが, 予想 6.1 に関しては, 2005 年 5 月末から 6 月に掛けて行なつた J.C. Eilbeck, V.Z. Enolskii, E. Previato の 3 名の方々と筆者達との Abel 函数に関する研究交流から生まれた結果が重大な hint となつたことを明記し, この 4 名の方々に深く感謝する次第である.

記号の約束. いふまでもないと思ふが, $\mathbb{Z}$ は有理整数環, $\mathbb{R}$ は実数体, $\mathbb{C}$ は複素数体を表す. Vector u の転置は ${}^t u$ と書く. 記号 $\big(d^\circ(z_1,\cdots,z_m) \geqq N\big)$ は変数 z_1, $\cdots$, z_m に関して全次数が N 以上の項からなる級数を表すものとする. 但し, これはこの級数の中に z_1, $\cdots$, z_m 以外の変数が含まれてゐないといふ意味ではないことに注意して欲しい.

Contents

(* 印の節は “purely” でない場合にも成り立つ事柄を記述)

1 Schur-Weierstrass polynomial and its derivatives*

1.1 General case

ここでは Schur-Weierstrass 多項式の行列式表示について述べる．主に [BEL2] と [Mac] から引用する．以下 (d,s) は互ひに素な正整数の組で $s > d \geqq 2$ とする．

定義 1.1. 非負整数 a, b でもつて $ad + bs$ と表すことができない非負整数の全体 $\mathbf{Weier}_{d,s}$ を大きい順に並べたものを Weierstrass sequence for (d,s) と呼び, その要素を

$$\mathbf{Weier}_{d,s} = \{w_g, w_{g-1}, \cdots, w_1\} \tag{1.2}$$

と書く．これら要素の個数をこの sequence の **長さ**と呼ぶ.

補題 1.3. Weierstrass sequence $\mathbf{Weier}_{d,s}$ について以下の事柄が成り立つ：
(1) $\mathbf{Weier}_{d,s}$ の長さ g は $(d-1)(s-1)/2$ である；
(2) $\mathbf{Weier}_{d,s}$ の最大元 w_g は $2g-1$ である；
(3) $w \in \mathbf{Weier}_{d,s}$ ならば $2g-1-w \notin \mathbf{Weier}_{d,s}$；
(4) もし $w > \widetilde{w}$ で $w \in \mathbf{Weier}_{d,s}$ であれば, $w - \widetilde{w} \in \mathbf{Weier}_{d,s}$ となる；
(5) 各 $i = 1, \cdots, g$ について $i \leqq w_i \leqq 2i-1$ である；特に $w_1 = 1$ である.

ここで我々の状況では $w_1 = 1$ であることに注意して, まづ整数 g 個の変数

$$(u^{(1)}_{\langle w_1\rangle}, \cdots, u^{(g)}_{\langle w_1\rangle}) = (u^{(1)}_{\langle 1\rangle}, \cdots, u^{(g)}_{\langle 1\rangle}) \tag{1.4}$$

を用意する．また $1 \leqq k \leqq 2g-1$ に対し,

$$u^{(i)}_{\langle k\rangle} := \tfrac{1}{k}(u^{(i)}_{\langle 1\rangle})^k, \qquad u_{\langle k\rangle} := u^{(1)}_{\langle k\rangle} + u^{(2)}_{\langle k\rangle} + \cdots + u^{(g)}_{\langle k\rangle} \tag{1.5}$$

として, さらに

$$\begin{aligned} u^{(i)} &:= (u^{(i)}_{\langle w_g\rangle}, u^{(i)}_{\langle w_{g-1}\rangle}, \cdots, u^{(i)}_{\langle w_1\rangle}), \\ u &:= u^{(1)} + u^{(2)} + \cdots + u^{(g)} \\ &= (u_{\langle w_g\rangle}, u_{\langle w_{g-1}\rangle}, \cdots, u_{\langle w_1\rangle}) \end{aligned} \tag{1.6}$$

と定める．各 $k \geqq 0$ に対して

$$(-1)^k U_k(u_{\langle w_1\rangle}, \cdots, u_{\langle w_g\rangle}) \tag{1.7}$$

は第 k 次の完全対称式, つまり $u^{(1)}_{\langle 1\rangle}$, $\cdots$, $u^{(n)}_{\langle 1\rangle}$ に関する全次数が k の単項式の単純和を表すことにする．それは $u_{\langle 1\rangle}$, $\cdots$, $u_{\langle g\rangle}$ の多項式である．以下誤解の生じる心配がないときは, 簡単のために

$$U_k = U_k(u_{\langle w_1\rangle}, \cdots, u_{\langle w_g\rangle}) \tag{1.8}$$

と書くことにする．また $u^{(j+1)}_{\langle 1\rangle} = \cdots = u^{(g)}_{\langle 1\rangle} = 0$ のときの $U_k(u_{\langle w_1\rangle}, \cdots, u_{\langle w_g\rangle})$ を

$$U^{[j]}_k = U^{[j]}_k(u_{\langle w_1\rangle}, \cdots, u_{\langle w_g\rangle}) := U_k(u^{(1)} + u^{(2)} + \cdots + u^{(j)}) \tag{1.9}$$

なる記号で表すことがある.

定義 1.10. 組 (d,s) に関する *Schur-Weierstrass polynomial* を

$$S_{d,s}=S_{d,s}(u_{\langle 1\rangle}u_{,\langle 2\rangle}\,,\cdots,u_{\langle 2g-2\rangle},u_{\langle 2g-1\rangle})=\Big|U_{w_i-g+j}\Big|_{1\leqq i,j\leqq n} \tag{1.11}$$

と定義する.

上記 1.10 の行列式は [BEL2], p.86 で定義されたものに他ならないことを説明する. ここで

$$p_j:=j\,u_{\langle j\rangle} \tag{1.12}$$

と置く. いま新たな変数 $s_{\langle w_1\rangle}$, $s_{\langle w_2\rangle}$, $\cdots$, $s_{\langle w_g\rangle}$ を

$$p_j=-{s_{\langle w_1\rangle}}^j-{s_{\langle w_2\rangle}}^j-\cdots-{s_{\langle w_g\rangle}}^j,\quad (1\leqq j\leqq 2g-1) \tag{1.13}$$

を満たすものとして導入する. この様な変数が取れることは, 以下の様にしてわかる. まづ, $\varepsilon_k(\boldsymbol{s})$ ($\boldsymbol{s}=(s_{\langle w_1\rangle},s_{\langle w_2\rangle},\cdots,s_{\langle w_g\rangle})$) を s_j 達の k 次基本対称式とするとき, これら $s_{\langle w_1\rangle}$, $s_{\langle w_2\rangle}$, $\cdots$, $s_{\langle w_g\rangle}$ が

$$\varepsilon_k(\boldsymbol{s})=\frac{1}{k!}\begin{vmatrix}-p_1 & 1 & & & \\ -p_2 & -p_1 & 2 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -p_{k-1} & -p_{k-2} & -p_{k-3} & \cdots & k-1\\ -p_k & -p_{k-1} & -p_{k-2} & \cdots & -p_1\end{vmatrix}\quad (k=1,\,2,\,\cdots,\,2g-1) \tag{1.14}$$

を満たすことが知られてゐる. これらについては [Mac], p.29, $\ell.-4$ and p.28, $\ell.13$ を参照されたい. さらに代数方程式の基本定理により, $\varepsilon_k(\boldsymbol{s})$ が任意に与へられた値を持つ様な $\boldsymbol{s}$ が存在する. 従つて 1.10 の行列式は [BEL2] の Theorem 4.1 のすぐ上にある Schur-Weierstrass 多項式 $S_{d,s}(-p_1,-p_2,\cdots,-p_{2g-1})$ に一致する.

注意 1.15. ここでの u_j は [BEL2] の z_j とは定数倍異なることに注意されたい. 具体的には $z_k=-w_ku_{\langle w_k\rangle}$ となつてゐる. さらに読者には後に説明する積分 (2.6) と [BEL2] の (2.28 はこの定数倍と積分の方向が異なることに注意していただきたい.

1.10 の行列式は明らかに $2g-1$ 個の変数 $u_{\langle 1\rangle}$, $u_{\langle 2\rangle}$, $\cdots$, $u_{\langle 2g-2\rangle}$, $u_{\langle 2g-1\rangle}$ の多項式であるが次の事実が示される.

定義 1.16. ここで **Sato weight** と呼ばれる重さを $u_{\langle w_j\rangle}$ のそれが w_j となるものとして定める.

容易に $S(u)$ は Sato weight $(d^2-1)(s^2-1)/24$ で homogeneous であることがわかる.

Proposition with Definition 1.17. 行列式 (1.11) は g 個の変数 $u_{\langle w_1\rangle}$, $u_{\langle w_2\rangle}$, $\cdots$, $u_{\langle w_g\rangle}$ のみの多項式である. そこで

$$S(u_{\langle w_g\rangle},u_{\langle w_{g-1}\rangle},\cdots,u_{\langle w_1\rangle}):=S_{d,s}(u_{\langle 1\rangle}u_{\langle 2\rangle},\cdots,u_{\langle 2g-2\rangle},u_{\langle 2g-1\rangle}) \tag{1.18}$$

と書くこととする. これも組 (d,s) に関する **Schur-Weierstrass polynomial** と呼ぶ.

証明 論文 [BEL2], p.86 の Theorem 4.1 そのものである. □

次に Schur-Weierstrass polynomial の canonical derivatives を定義する. まづ次の定義をする：

定義 1.19. **attached Sato weight for the k-th stratum** といふものを

$$\mathrm{aw}(k) = \sum_{j=1}^{g-k}(w_j - j + 1) \tag{1.20}$$

で定める.

次の補題は k が小さいときの $\mathrm{aw}(k)$ の計算に便利である.

補題 1.21.

$$\sum_{j=1}^{g}(w_j - j + 1) = \frac{(d^2-1)(s^2-1)}{24}. \tag{1.22}$$

証明 定義 1.10 の $S(u)$ の行列式表示から, 主張の左辺はこの行列式の対角成分の Sato weight の和であり, それは [BEL2], Lemma 4.4 の直前で計算されてゐる通りに右辺になる. □

以下では (1.6) の様な vector $u^{(j)}$ の 1 つが動く $\mathbb{C}^g$ 内の部分を $\mathit{\Delta}^{[1]}$ と書く. 即ち

$$\mathit{\Delta}^{[1]} = \{(\tfrac{1}{w_g}{u_{\langle 1\rangle}}^{w_g}, \tfrac{1}{w_{g-1}}{u_{\langle 1\rangle}}^{w_{g-1}}, \cdots, \tfrac{1}{w_2}{u_{\langle 1\rangle}}^{w_2}, u_{\langle 1\rangle}) \,\big|\, u_{\langle 1\rangle} \in \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^g. \tag{1.23}$$

さらに, 一般に

$$\mathit{\Delta}^{[n]} = \{u^{(1)} + \cdots + u^{(n)} \,\big|\, u^{(j)} \in \mathit{\Delta}^{[1]},\ 1 \leqq j \leqq n\} \subset \mathbf{C}^g \tag{1.24}$$

と書く. 従つて

$$(0, 0, \cdots, 0) \in \mathit{\Delta}^{[1]} \subset \mathit{\Delta}^{[2]} \subset \cdots \subset \mathit{\Delta}^{[g]} = \mathbf{C}^g \tag{1.25}$$

なる階層化 (stratification) を得る.

定義 1.26. I を $\mathbf{Weier}_{d,s} = \{w_g, w_{g-1}, \cdots, w_2, w_1\}$ に属する数をいくつか (重複も許す) 並べたものとする. ただし, その順序は問はない. この様な I を (組 (d,s) に関する) **添字集合**と呼ぶ. この論文では $I = \langle 4332111\rangle$ などと必ず $\langle\ \ \rangle$ を付けて記す.

定義 1.27. 添字集合 I について対応する $S(u)$ の 導函数 $S_I(u)$ を

$$S_I(u) = \bigg(\prod_{i\in I}\frac{\partial}{\partial u_{\langle i\rangle}}\bigg)S(u) \tag{1.28}$$

と定義する. もちろん重複した $i \in I$ については重複しただけの階数の偏導函数を考へてゐる.

Schur-Weierstrass 多項式の上記の Stratification $\mathit{\Delta}^{[n]}$ に付随した導函数を以下の様に定義する

定義 1.29. $0 \leqq k \leqq g$ について, 記号 $\natural^k$ は $\mathbf{Weier}_{d,s}$ から取つた全 Sato weight が $\mathrm{aw}(k)$ の複添字集合であつて, $S_{\natural^k}(\mathit{\Delta}^{[k]})$ が恒等的には消えてゐないもののうちで, 辞書式順序に関して最も後部に位置するものを示すことにする.

このとき次の様な vanishing properties を得る. これは主定理の証明には必ずしも必要ではないが, この性質は後に述べる $\sigma_{\natural^k}(u)$ の vanishing properties 5.11 が完全に退化したものであることに注意していただきたい. そのことを踏まえておくことで, 本論の以下の部分が読み易くなるものと期待する.

命題 1.30. I を $\mathbf{Weier}_{d,s}$ の元からなる複添字の集合とする. このとき次が成り立つ. (1) $\mathrm{sw}(I) < \mathrm{aw}(n)$ ならば $S_I(\mathit{\Delta}^{[n]}) = 0$ である. (2) $\mathrm{sw}(I) = \mathrm{aw}(n)$ とする. このとき (1) より $S_I(\mathit{\Delta}^{[n-1]}) = 0$ となるが, もし $S_I(u)$ が $\mathit{\Delta}^{[n]}$ 上で恒等的には零でないならば, $u \in \mathit{\Delta}^{[n]}$ に対して,

$$S_I(u) = 0 \iff u \in \mathit{\Delta}^{[n-1]}. \tag{1.31}$$

特に, $u \in \mathit{\Delta}^{[n]}$ に対して,

$$S_{\natural^n}(u) = 0 \iff u \in \mathit{\Delta}^{[n-1]}. \tag{1.32}$$

(3) $1 \leqq n \leqq g$ で $u^{(j)} \in \mathit{\Delta}^{[1]}$ $(1 \leqq j \leqq n)$, $v \in \mathit{\Delta}^{[1]}$ とするとき,

$$\begin{aligned} &S_{\natural^{n+1}}(u^{(1)} + \cdots + u^{(n)} + v) \\ &\qquad = S_{\natural^n}(u^{(1)} + \cdots + u^{(n)}) {v_{\langle 1\rangle}}^{w_n+n-1} + \big(d^\circ(v_{\langle 1\rangle}) \geqq w_n + n\big) \end{aligned} \tag{1.33}$$

と展開される.

証明 きちんと書けば説明はかなり長くなるが, 基本的には [Ô4] の方法を一般化して行なへばできる. □

次に Schur-Weierstrass 多項式の導函数の求め方について述べる. Schur-Weierstrass 多項式の導函数は 1.10 の行列式の行を右にずらすだけで, 与へられる. すなはち

$$\frac{\partial}{\partial u_{\langle k\rangle}} = (-1)^{k+1} \sum_{r \geqq 0} U_r \frac{\partial}{\partial U_{k+r}} \tag{1.34}$$

で与へられるのである. ここでは, 簡単に $U_j = U_j^{[g]}(\boldsymbol{u}_{\langle 1\rangle})$ と書いてゐる. (1.34) の意味を考へれば, これを行列式に作用させたときは各行を k だけ右に移動したものの和になることがわかる. ただし, 各行は

$$\cdots,\ 0,\ 0,\ 0,\ U_0,\ U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4,\ U_5,\ \cdots \tag{1.35}$$

なる両側無限列の連続した g 項を見てゐるものと解釈してゐる. この様に理解しておくことは $S(\boldsymbol{u})$ の導函数を計算するのに非常に重要である. 実際, この公式から容易に

$$S_{\natural^n} = \pm \left| U_{w_{g+1-i} - \mathrm{aw}(n) + 1 - j} \right|_{1 \leqq i, j \leqq n} \tag{1.36}$$

が得られる.

1.2 (5, 6) case

この節では, $(d,s)=(5,6)$ の場合に限定して, 前節で述べた Schur-Weierstrass 多項式を扱ふ. 特にその導函数も計算する. $(d,s)=(5,6)$ の場合は $g=10$ で

$$\begin{aligned}\mathbf{Weier}_{5,6} &= \{w_{10}, w_9, w_8, w_7, w_6, w_5, w_4, w_3, w_2, w_1\}\\ &= \{\ 19,\ 14,\ 13,\ \ 9,\ \ 8,\ \ 7,\ \ 4,\ \ 3,\ \ 2,\ \ 1\}\end{aligned} \tag{1.37}$$

であるので, Schur-Weierstrass 多項式は

$$\begin{aligned}&S(u_{\langle 19\rangle}, u_{\langle 14\rangle}, \cdots, u_{\langle 1\rangle})\\ &= \left|\begin{array}{cccccccccc} U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} & U_{16} & U_{17} & U_{18} & U_{19}\\ U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14}\\ U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13}\\ U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9\\ & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8\\ & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7\\ & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4\\ & & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3\\ & & & & & & & U_0 & U_1 & U_2\\ & & & & & & & & U_0 & U_1 \end{array}\right|\end{aligned} \tag{1.38}$$

となる. 但し, 空白はそこの成分が 0 であることを示す. また $\mathrm{aw}(k)$ は次の表の通り :

(1.39)

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathrm{aw}(k)$	25	19	13	10	7	4	3	2	1	0

(1.40)

$S_\sharp$	$S_\flat$	$S_{\natural^3}$	$S_{\natural^4}$	$S_{\natural^5}$	$S_{\natural^6}$	$S_{\natural^7}$	$S_{\natural^8}$	$S_{\natural^9}$	$S_{\natural^n}$ $(n \geqq 10)$
$S_{\langle 4,8,13\rangle}$	$S_{\langle 379\rangle}$	$S_{\langle 148\rangle}$	$S_{\langle 37\rangle}$	$S_{\langle 7\rangle}$	$S_{\langle 4\rangle}$	$S_{\langle 3\rangle}$	$S_{\langle 2\rangle}$	$S_{\langle 1\rangle}$	S

さらに $S_{\natural^n}(u)$ の計算例を以下に掲げる. 例へば,

$$\begin{aligned}&S_{\langle 148\rangle}(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial^3}{\partial u_{\langle 1\rangle}\partial u_{\langle 4\rangle}\partial u_{\langle 8\rangle}} S(\boldsymbol{u})\\ &= \left|\begin{array}{cccccccccc} U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} & U_{16} & U_{17} & U_{18} & U_{19}\\ U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14}\\ U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13}\\ U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & \boxed{U_4} & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9\\ & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & \boxed{U_8}\\ & & U_0 & \boxed{U_1} & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7\\ & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4\\ & & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3\\ & & & & & & & U_0 & U_1 & U_2\\ & & & & & & & & U_0 & U_1 \end{array}\right|\end{aligned} \tag{1.41}$$

となることがわかる．但し, $\boxed{}$ は, その成分の所が U_0 になる様にその行を右移動させせることを意味する．この様にいろいろな右移動を受けた行列式の内, 唯一つが残ることを説明するが, 読者は実際に試していただきたい．このことはより洗練された説明がなされるべきであるが著者にはまだ十分な考察ができてゐない．

この計算を続ければ

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix}
U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} & U_{16} & U_{17} & U_{18} & U_{19} \\
U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\
U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} \\
 & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 \\
 & & & & & & & & & U_0 \\
 & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 \\
 & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\
 & & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 \\
 & & & & & & & U_0 & U_1 & U_2 \\
 & & & & & & & & U_0 & U_1
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} & U_{16} & U_{17} & U_{18} & U_{19} \\
U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\
U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} \\
 & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 \\
 & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 \\
 & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\
 & & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 \\
 & & & & & & & U_0 & U_1 & U_2 \\
 & & & & & & & & U_0 & U_1 \\
 & & & & & & & & & U_0
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
U_{10} & U_{11} & U_{12} \\
U_5 & U_6 & U_7 \\
U_4 & U_5 & U_6
\end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{1.42}
$$

となることがわかる．同様の計算をして, 以後に関係する $S(\boldsymbol{u})$ のいくつかの導函数の計算を列記する．但し, この論文で必要なのは下記の (1.43) と (1.44) のみであるが, 随所で述べる様に, 今回の証明は恐らく遠回りであり, これを簡易化する際にはここで述べる導函数の行列式表示すべてが必要であらうと思はれるので, 興味ある研究者の便宜を図つて, すべてを記しておくことにする．

$$
\begin{aligned}
S_{\langle 13,8,4\rangle}(\boldsymbol{u}) &= \frac{\partial^3}{\partial u_{\langle 13\rangle}\partial u_{\langle 8\rangle}\partial u_{\langle 4\rangle}} S(\boldsymbol{u}) \\
&= \begin{vmatrix}
U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} & U_{16} & U_{17} & U_{18} & U_{19} \\
U_5 & U_6 & U_7 & \boxed{U_8} & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\
U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & \boxed{U_{13}} \\
U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & \boxed{U_4} & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 \\
 & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 \\
 & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 \\
 & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\
 & & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 \\
 & & & & & & & U_0 & U_1 & U_2 \\
 & & & & & & & & U_0 & U_1
\end{vmatrix} = -U_{10}
\end{aligned} \tag{1.43}
$$

(1.44)

$$S_{\langle 973\rangle}(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial^3}{\partial u_{\langle 9\rangle}\partial u_{\langle 7\rangle}\partial u_{\langle 3\rangle}} S(\boldsymbol{u})$$

$$= \begin{vmatrix} U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} & U_{16} & U_{17} & U_{18} & U_{19} \\ U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ U_4 & U_5 & U_6 & \boxed{U_7} & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & \boxed{U_9} \\ & U_0 & U_1 & U_2 & \boxed{U_3} & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 \\ & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 \\ & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ & & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 \\ & & & & & & & U_0 & U_1 & U_2 \\ & & & & & & & & U_0 & U_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_{10} & U_{11} \\ U_5 & U_6 \end{vmatrix}$$

(1.45)

$$S_{\langle 841\rangle}(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial^3}{\partial u_{\langle 8\rangle}\partial u_{\langle 4\rangle}\partial u_{\langle 1\rangle}} S(\boldsymbol{u})$$

$$= \begin{vmatrix} U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} & U_{16} & U_{17} & U_{18} & U_{19} \\ U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & \boxed{U_4} & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 \\ & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & \boxed{U_8} \\ & & U_0 & \boxed{U_1} & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 \\ & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ & & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 \\ & & & & & & & U_0 & U_1 & U_2 \\ & & & & & & & & U_0 & U_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_{10} & U_{11} & U_{12} \\ U_5 & U_6 & U_7 \\ U_4 & U_5 & U_6 \end{vmatrix}$$

(1.46)

$$S_{\langle 73\rangle}(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial^2}{\partial u_{\langle 3\rangle}\partial u_{\langle 7\rangle}} S(\boldsymbol{u})$$

$$= \begin{vmatrix} U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} & U_{16} & U_{17} & U_{18} & U_{19} \\ U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 \\ & U_0 & U_1 & U_2 & \boxed{U_3} & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 \\ & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & \boxed{U_7} \\ & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ & & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 \\ & & & & & & & U_0 & U_1 & U_2 \\ & & & & & & & & U_0 & U_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_5 & U_6 & U_7 & U_8 \\ U_4 & U_5 & U_6 & U_7 \\ U_0 & U_1 & U_2 & U_3 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
S_{\langle 7\rangle}(\boldsymbol{u}) &= \frac{\partial}{\partial u_{\langle 7\rangle}} S(\boldsymbol{u}) \\
&= \begin{vmatrix}
U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} & U_{16} & U_{17} & U_{18} & U_{19} \\
U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\
U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} \\
U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 \\
 & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 \\
 & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & \boxed{U_7} \\
 & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\
 & & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 \\
 & & & & & & & U_0 & U_1 & U_2 \\
 & & & & & & & & U_0 & U_1
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\
U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 \\
U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 \\
U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\
 & U_0 & U_1 & U_2 & U_3
\end{vmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.47}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{\langle 4\rangle}(\boldsymbol{u}) &= \frac{\partial}{\partial u_{\langle 4\rangle}} S(\boldsymbol{u}) \\
&= \begin{vmatrix}
U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} & U_{16} & U_{17} & U_{18} & U_{19} \\
U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\
U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} \\
U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 \\
 & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 \\
 & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 \\
 & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & \boxed{U_4} \\
 & & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 \\
 & & & & & & & U_0 & U_1 & U_2 \\
 & & & & & & & & U_0 & U_1
\end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix}
U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} \\
U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} \\
U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 \\
U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 \\
 & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\
 & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3
\end{vmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.48}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{\langle 3\rangle}(\boldsymbol{u}) &= \frac{\partial}{\partial u_{\langle 3\rangle}} S(\boldsymbol{u}) \\
&= \begin{vmatrix}
U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} & U_{16} & U_{17} & U_{18} & U_{19} \\
U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\
U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} \\
U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 \\
 & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 \\
 & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 \\
 & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\
 & & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & \boxed{U_3} \\
 & & & & & & & U_0 & U_1 & U_2 \\
 & & & & & & & & U_0 & U_1
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} & U_{16} \\
U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} \\
U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} \\
U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 \\
 & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 \\
 & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\
 & & & & & U_0 & U_1
\end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{1.49}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{\langle 2\rangle}(\boldsymbol{u}) &= \frac{\partial}{\partial u_{\langle 2\rangle}} S(\boldsymbol{u}) \\
&= \begin{vmatrix}
U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} & U_{16} & U_{17} & U_{18} & U_{19} \\
U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\
U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} \\
U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 \\
 & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 \\
 & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 \\
 & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\
 & & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 \\
 & & & & & & & U_0 & U_1 & \boxed{U_2} \\
 & & & & & & & & U_0 & U_1
\end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix}
U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} & U_{16} & U_{17} \\
U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} \\
U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} \\
U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 \\
 & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 \\
 & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 \\
 & & & & & U_0 & U_1 & U_2 \\
 & & & & & & U_0 & U_1
\end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{1.50}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{\langle 1\rangle}(\boldsymbol{u}) &= \frac{\partial}{\partial u_{\langle 1\rangle}} S(\boldsymbol{u}) \\
&= \begin{vmatrix}
U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} & U_{16} & U_{17} & U_{18} & U_{19} \\
U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\
U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} \\
U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 \\
 & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 \\
 & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 \\
 & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\
 & & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 \\
 & & & & & & & U_0 & U_1 & U_2 \\
 & & & & & & & & U_0 & \boxed{U_1}
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} & U_{16} & U_{17} & U_{18} \\
U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} \\
U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} \\
U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 \\
 & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 \\
 & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 \\
 & & & & & U_0 & U_1 & U_2 & U_3 \\
 & & & & & & U_0 & U_1 & U_2 \\
 & & & & & & & U_0 & U_1
\end{vmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.51}
$$

2 d-Gonal curves with unique point at infinity*

2.1 Generalities

ここでは一般的な状況の下に準備をする．いま, いま (d, s) $(0 < n < s)$ は第 1 節の冒頭に述べたものと同じ様に, 互ひに素な整数の組とする．C を

$$\begin{aligned}&f(x,y)=0,\quad \text{但し}\\ &\quad f(x,y)=y^n-x^s-\sum_{a,b}\lambda_{ns-an-bs}x^ay^b\quad (\lambda_j\ \text{は定数}),\end{aligned} \tag{2.1}$$

で定義される代数曲線とする．ここで a, b は

$$an+bs<ns,\quad a\geqq 0,\quad b\geqq 0 \tag{2.2}$$

を満たす整数の組を走る．ただし, C は無限遠点に自然な 1 点 ∞ を点を持つ完備な射影曲線と見る．特殊な λ_j を除けば C の種数は $g=(n-1)(s-1)/2$ である．これはあとで具体的に与へる $\mathit{\Gamma}(C,\Omega^1)$ の基底の個数からも判明する．いま

$$\overline{\mathbf{Weier}}_{d,s} \tag{2.3}$$

で $ad+bs$（a と b は非負整数）の形に表される整数の内で小さい方から順に並べたもの表すこととし, それを

$$\overline{\mathbf{Weier}}_{d,s}=\{a_1d+b_1s,a_2d+b_2s,\cdots,a_gd+b_gs,\cdots\} \tag{2.4}$$

と記す．容易にわかる様にこれら a_i, b_i 達は一意的に定まる．良く知られてゐる様に

$$\begin{aligned}&\omega_{\langle w_g\rangle}=\frac{\mathrm{d}x}{dy^{d-1}},\quad \omega_{\langle w_{g-1}\rangle}=\frac{x\mathrm{d}x}{dy^{d-1}},\quad \omega_{\langle w_{g-2}\rangle}=\frac{x^{a_3}y^{b_3}\mathrm{d}x}{dy^{d-1}},\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots,\quad \omega_{\langle w_1\rangle}=\frac{x^{a_g}y^{b_g}\mathrm{d}x}{dy^{d-1}}\end{aligned} \tag{2.5}$$

が C 上の正則 1 形式全体の空間の基底である．曲線 C 上の g 個の動点 (x_1,y_1), (x_2,y_2), $\cdots$, (x_g,y_g) と, 点 ∞ からこれら g 個の点までのあらゆる積分路についての積分の値

$$\begin{aligned}u&=(u_{\langle w_g\rangle},u_{\langle w_{g-1}\rangle},\cdots,u_{\langle w_1\rangle})\\ &=\Big(\int_\infty^{(x_1,y_1)}+\int_\infty^{(x_2,y_2)}+\cdots+\int_\infty^{(x_g,y_g)}\Big)(\omega_{\langle w_g\rangle},\omega_{\langle w_{g-1}\rangle},\cdots,\omega_{\langle w_1\rangle})\end{aligned} \tag{2.6}$$

は $\mathbf{C}^g$ を張る．以下では常に u, v, $u^{(j)}$ などの文字で $\mathbf{C}^g$ の点を表し, これらの下に添字を付けた $(u_{\langle w_g\rangle},u_{\langle w_{g-1}\rangle},\cdots,u_{\langle w_1\rangle})$, $(v_{\langle w_g\rangle},v_{\langle w_{g-1}\rangle},\cdots,v_{\langle w_1\rangle})$, $(u^{(j)}_{\langle w_g\rangle},u^{(j)}_{\langle w_{g-1}\rangle},\cdots,u^{(j)}_{\langle w_1\rangle})$ などは $\mathbf{C}^g$ の自然な座標を示すものとする．また, これらのうちあらゆる閉じ

た積分路に対する値の全体を Λ と書く. Λ は $\mathbf{C}^g$ の格子をなす. 曲線 C の Jacobi 多様体の $\mathbf{C}$ 上の閉点全体 $\mathbf{C}^g/\Lambda$ を J と書く. Modulo Λ による自然な写像を

$$\kappa : \mathbf{C}^g \to \mathbf{C}^g/\Lambda = J \tag{2.7}$$

と書く. もちろん $\Lambda = \kappa^{-1}\big((0, 0, \cdots, 0)\big)$ である. 上記の積分で表される J の点と $\mathrm{Pic}^\circ(C)$ の点, つまり C 上の因子 $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) + \cdots + (x_g, y_g) - g \cdot \infty$ の線形同値に関する代表類とを同一視し, C を J に

$$\begin{aligned} \iota : C &\hookrightarrow \mathrm{Pic}^\circ(C) = J \\ P &\mapsto P - \infty \end{aligned} \tag{2.8}$$

によつて埋め込む. より一般に C の k 個（$0 \leqq k \leqq 10$）の対称積 $\mathrm{Sym}^k(C)$ の

$$\begin{aligned} \iota : \mathrm{Sym}^k(C) &\to \mathrm{Pic}^\circ(C) = J \\ (P_1, \cdots, P_k) &\mapsto P_1 + \cdots + P_k - k \cdot \infty \end{aligned} \tag{2.9}$$

による像を $W^{[k]}$ と記す. 特に $W^{[0]} = (0, 0, \cdots, 0)$, $W^{[1]} = \iota(C)$, $W^{[g]} = J$ である. さらに $[-1]$ で全空間 $\mathbf{C}^g$ や J における -1 倍を表す, 即ち

$$[-1](u_{\langle w_g\rangle}, \cdots, u_{\langle w_2\rangle}, u_{\langle w_1\rangle}) = (-u_{\langle w_g\rangle}, \cdots, -u_{\langle w_2\rangle}, -u_{\langle w_1\rangle}) \tag{2.10}$$

として,

$$\Theta^{[k]} = W^{[k]} \cup [-1]W^{[k]} \tag{2.11}$$

とおく. これを**標準的 theta 部分集合**と呼ぶ. また $\kappa^{-1}\iota(C)$ は C の<u>普遍 Abel 被覆</u>になつてゐる. この $\Theta^{[k]}$ などにより J に層化構造が定まる：

$$\begin{array}{ccccccccccc} \infty \in \mathrm{Sym}^1 C & \subset & \mathrm{Sym}^2 C & \subset & \cdots & \subset & \mathrm{Sym}^{g-1} C & \subset & \mathrm{Sym}^g C. \\ \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow & & \cdots & & \downarrow & & \downarrow \\ O \in W^{[1]} & \subset & W^{[2]} & \subset & \cdots & \subset & W^{[g-1]} & \subset & W^{[g]} \\ \| \quad \cap & & \cap & & \cdots & & \cap & & \| \\ O \in \Theta^{[1]} & \subset & \Theta^{[2]} & \subset & \cdots & \subset & \Theta^{[g-1]} & \subset & \Theta^{[g]} = J = \mathbf{C}^g/\Lambda. \end{array} \tag{2.12}$$

注意 2.13. たとへば楕円曲線や楕円曲線（つまり $d = 2$）については $\Theta^{[k]} = W^{[k]}$ であるが, 一般には $\Theta^{[k]} \neq W^{[k]}$ （$1 \leqq k \leqq g - 2$）である.

補題 2.14. $u = (u_{\langle w_g\rangle}, u_{\langle w_{g-1}\rangle}, \cdots, u_{\langle w_1\rangle}) \in \kappa^{-1}\iota(C)$ のとき各 $u_{\langle w_j\rangle}$ （$2 \leqq j \leqq g$）は $u_{\langle 1\rangle}$ によつて

$$u_{\langle w_j\rangle} = \frac{1}{w_j} u_{\langle 1\rangle}{}^{w_j} + \cdots \tag{2.15}$$

なる形に展開される.

証明 点 ∞ における曲線 C 上の局所助変数を $t=1/\sqrt[d]{x}$ と取れば,

$$
\begin{aligned}
u_{\langle w_j\rangle} &= \int_\infty^{(x,y)} \frac{x^{a_{g-j+1}}y^{b_{g-j+1}}\mathrm{d}x}{dy^{d-1}}\\
&= \int_0^t \frac{t^{-a_jd-b_js}+\cdots}{dt^{s(d-1)}+\cdots}\cdot\frac{-d}{t^{d+1}}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^t \big(-t^{w_j-1}+\cdots\big)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{w_j}t^{w_j}+\cdots
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

となる. □

補題 2.17. $u=(u_{\langle w_g\rangle},u_{\langle w_{g-1}\rangle},\cdots,u_{\langle w_1\rangle})\in\kappa^{-1}\iota(C)$ のとき $x(u)$ と $y(u)$ は局所助変数 $u_{\langle w_1\rangle}=u_{\langle 1\rangle}$ に関して次のやうに展開される：

$$
x(u)=\frac{1}{{u_{\langle 1\rangle}}^d}+\cdots,\qquad y(u)=\frac{1}{{u_{\langle 1\rangle}}^s}+\cdots.
\tag{2.18}
$$

証明 上記, 補題 2.16 と同様に示される. □

注意 2.19. 以上のことから<u>$u_{\langle 1\rangle}$ は $\kappa^{-1}\iota(C)$ 上で原点における局所助変数である</u>ことがわかる.

ここで第 1 節と同様に weight を導入する.

定義 2.20. Sato weight と呼ばれる重さを $u_{\langle w_j\rangle}$, $x(u)$, $y(u)$, λ_j のそれがそれぞれ w_j, $-d$, $-s$, $-j$ となるものとして定める.

この weight により, 本論文に登場するすべての等式は homogeneous となる. 次に C の**判別式**を定義する.

定義 2.21. 上記 (2.1) で定義される代数曲線 C の**判別式** D を

$$
D=\Big[\mathrm{rslt}_x\Big(\mathrm{rslt}_y\big(f(x,y),\tfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)\big),\mathrm{rslt}_y\big(f(x,y),\tfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)\big)\Big)\Big]^{1/d}
\tag{2.22}
$$

で定義する. 但し rslt_z は変数 z に関する Sylvester の意味の終結式を示し, d 乗根は λ_j 達を不定元と見たときに

$$
D\in\mathbf{Z}[\{\lambda_j\}]
\tag{2.23}
$$

となる様に取るものとする.

上の様に冪根が取れることの証明は (2.1) の一般の曲線についてはできてゐない. 後に議論する (2.25) の場合 (後にいふ purely d-gonal のとき), つまり $f(x,y)$ が y^d 以外に y を含む項を持たないとき D は $f(x,y)-y^d=0$ の s 個の根の差積の平方に一致する. しかし, 以下の議論ではこの取り方は本質的ではないのでこれ以上は議論しない.

2.2 Purely d-gonal curves with unique point at infinity

ここでは, purely d-gonal curves といふものを説明し, なぜその様な type の曲線を扱ふのかを述べたい.

定義 2.24. いま (d, s) は第 1 節の冒頭に述べたものと同じとし, C を

$$y^d = x^s + \lambda_d x^{s-1} + \lambda_{2d} x^{s-2} + \cdots + \lambda_{d(s-1)} x + \lambda_{ds} \quad (\lambda_j \text{ は定数}) \tag{2.25}$$

で定義される代数曲線とする. ここでも, もちろん無限遠点 ∞ を 1 点付けて完備な射影曲線と見てゐる. この様に定義される代数曲線 C を **purely *d*-gonal curve** と呼ぶ.

右辺が x の多項式として重根を持たないとき, この曲線は非特異であつて, その種数は $g = (d-1)(s-1)/2$ である.

本論文においては purely d-gonal curves, とくに $(d, s) = (5, 6)$ の場合を主に扱ふが, 特に断らない限りは, 第 2 節の記号はそのまま使ふ.

最も簡単な場合, つまり $(d, s) = (2, 3)$ のとき, 一般に C は楕円曲線となる. 定義体の標数を一般にして考へるとき, 第 2.1 節で述べた様な一般に形の $f(x, y)$ を考へる必要があるが, 標数 2 などを除き, y をそれに適当な定数を加へたものに置き換へれば, (2.24) の形に帰着させられる.

しかるに, $d \geqq 3$ となると事情は異なり, 2.13 で述べた様に, 一般には (2.9) のところで定義した W_k が対称性を持たないので, [Ô2], [Ô3], [Ô4] の naïve な拡張は困難である. そこで, $d = 2$ のときの -1 倍に関する対称性に代るものとして, まづは 1 の d 乗根に関しての対称性を持つものについて議論をするのである.

これが purely d-gonal curves に限定する理由である. しかし, 本論文の結果がこの制限を取り外した場合の研究に参考となることを期待してゐる.

2.3 Automorphisms for purely d-gonal curves

いま (d,s) は 1.1 に述べたものと同じとし, C を (2.25) 式で定義される purely d-gonal curve とする. 曲線 C には 1 の d 乗根による作用がある. 即ち,

$$\zeta = \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{d}) \tag{2.26}$$

とするとき, C 上の点 (x,y) に対して

$$[\zeta](x,y) = (x, \zeta y) \tag{2.27}$$

もまた C 上の点である. つまり μ を $(2g-1)\mu$ $(\equiv s\mu) \equiv 1 \bmod d$ なる整数するとき, $u \in \kappa^{-1}(W_1)$ について

$$[\zeta]u_{\langle w_g\rangle} = u_{\langle w_g\rangle}, \qquad [\zeta]u_{\langle 1\rangle} = \zeta^{\mu} u_{\langle 1\rangle} \tag{2.28}$$

が成り立ち, さらに

$$\begin{aligned}&[\zeta](u_{\langle w_g\rangle}, u_{\langle w_{g-1}\rangle}, \cdots, u_{\langle 2\rangle}, u_{\langle 1\rangle}) \\ &\quad = (\zeta u_{\langle w_g\rangle}, \zeta^{\mu w_{g-1}} u_{\langle w_{g-1}\rangle}, \cdots, \zeta^{\mu w_2} u_{\langle w_2\rangle}, \zeta^{\mu} u_{\langle 1\rangle}) \qquad (u \in \kappa^{-1}(W^{[1]}))\end{aligned} \tag{2.29}$$

が成り立つ. これを $x(u)$ と $y(u)$ に即して書けば

$$x([\zeta]u) = x(u), \quad y([\zeta]u) = \zeta y(u) \quad (u \in \kappa^{-1}(W^{[1]})) \tag{2.30}$$

となつてゐる. このことから, 全空間 $\mathbb{C}^g$ にも ζ が

$$\begin{aligned}&[\zeta](u_{\langle w_g\rangle}, u_{\langle w_{g-1}\rangle}, \cdots, u_{\langle 2\rangle}, u_{\langle 1\rangle}) \\ &\quad = (\zeta u_{\langle w_g\rangle}, \zeta^{\mu w_{g-1}} u_{\langle w_{g-1}\rangle}, \cdots, \zeta^{\mu w_2} u_{\langle w_2\rangle}, \zeta^{\mu} u_{\langle 1\rangle}) \qquad (u \in \mathbb{C}^g)\end{aligned} \tag{2.31}$$

によつて作用してゐる.

3 Sigma functions*

3.1 Generalities

ここでは [BEL1], Chap.1 などに従つて一般に (2.1) で定義される曲線 C に付随する **sigma 函数**

$$\begin{aligned}\sigma(u) &= \sigma\big(u_{\langle w_g\rangle}, u_{\langle w_{g-1}\rangle}, \cdots, u_{\langle w_1\rangle}\big) \\ &= \sigma\big(u_{\langle 2g-1\rangle}, u_{\langle 2g-d-1\rangle}, \cdots, u_{\langle 1\rangle}\big)\end{aligned} \tag{3.1}$$

を考へる. まづ $H_1(C, \mathbb{Z})$ の生成元

$$\alpha_i, \quad \beta_j \quad (1 \leqq i,\ j \leqq g) \tag{3.2}$$

を, それらの交点数が $\alpha_i \cdot \alpha_j = \beta_i \cdot \beta_j = \delta_{ij}$, $\alpha_i \cdot \beta_j = 0$ となるやうに選ぶ. 以下は [Ba] の p.68 と p.194, ℓ.2 の式の周辺に従つて具体的に述べる. まづ上記 ω_j から定まる周期

$$[\,\omega' \ \ \omega''] = \left[\int_{\alpha_i} \omega_j \quad \int_{\beta_i} \omega_j\right]_{i,j=1,2,\cdots,g} \tag{3.3}$$

を考へる. さらに文字 Z, W を使つて C 上の 2 点 (x, y), (z, w) について

$$\Omega\big((x,y),(z,w)\big) = \frac{1}{(x-z)\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)} \sum_{k=1}^{d} y^{d-k}\left[\frac{f(Z,W)}{W^{d+1-k}}\right]_W \Bigg|_{(Z,W)=(z,w)} \tag{3.4}$$

とおく. これは Sato weight が d で斉次である. ただし, $[\ \ ]_W$ は W について負羃の項を取り除くことを意味する.

Proposition with Definition 3.5. (fundamental 2-forms of second kind) $C \times C$ の上の 2-form

$$\big((x,y),(z,w)\big) \mapsto R\big((z,w),(x,y)\big)dzdx \tag{3.6}$$

であつて

$$\lim_{x \to z}(z-x)^2 R\big((z,w),(x,y)\big) = 1 \tag{3.7}$$

が成り立ち, $(x,y) = (z,w)$ なる点でのみ極を持ち, その他の点では正則である様なものを考へる. 第 1 種微分形式 (2.5) と (3.4) の Ω, および C 上の 2 点 (x, y), (z, w) に対して, 無限遠点 ∞ のみに極を持つ第 2 種微分形式 $\eta_j = \eta_j(x, y)$ $(j = 1, \cdots, g)$ が存在して, 上の様な 2-form は

$$R\big((x,y),(z,w)\big) := \frac{d}{dx}\Omega\big((z,w),(x,y)\big) + \sum_{j=1}^{g} \frac{\omega_j(z,w)}{dz}\frac{\eta_j(x,y)}{dx} \tag{3.8}$$

と書かれる. ただし, 先頭の微分は動点 $(x, y) \in C$ に関する微分である[1]. ここでさらに $R\big((x, y), (z, w)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}w$ が Sato weight に関して斉重 (重さ 0), かつ 2 点の座標に関して対称, つまり

$$R\big((z, w), (x, y)\big) = R\big((x, y), (z, w)\big) \tag{3.9}$$

が成り立つことを要請する. その様な $\{\eta_j\}$ の組は, $\{\omega_j\}$ の張る空間を modulo として唯 1 組だけに定まる. これらを満足する 2-from $R\big((x, y), (z, w)\big)dxdz$ を (Klein の) *fundamental* 2-*form of second kind* と呼ぶ.

証明 微分形式 $\{\eta_j\}$ の存在を認めた上では, (3.8) が極についての条件を満たすことは, まづ (x, y) の函数と見て, (2.16) を使つて調べることで $(x, y) = (z, w)$ 以外に極がないことが知られ, さらに対称性 (3.9) により (z, w) の函数と見ても同様であることで, 理解される. 次に fundamental 2-form of second kind を与へる様な微分形式 η_j $(j = 1, \cdots, g)$ の上の様な η_j が

$$\begin{aligned} &\eta_j(x, y) = \frac{h_j(x, y)}{\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)}, \\ &\text{但し}\quad h_j(x, y) \in \mathbb{Q}[\lambda_1, \cdots, \lambda_{12}][x, y] \quad \text{で斉重}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

の形に書かれることと, Sato weight についての制約などを取り入れて, 未定係数法で求められることが示せる. また $\{\omega_j\}$ の張る空間を modulo しての一意性については, 2 種類の η_j 達についての (3.8) の差を眺めることでわかる ([Ba], p.194 の周辺も参照されたい). □

さて, (3.10) の h_j について, さらに

$$h_j(x, y) \text{ の項数が最も少くなること} \tag{3.11}$$

を要請すれば, η_j は一意的に定まるから, 以後はその様なものを η_j と記すことにする. $h_j(x, y)$ を具体的に書き下すこともできるが, 以下で必要でないのでここでは行はない. 以上の状況で,

$$R\big((x, y), (z, w)\big)\, dxdz = \frac{F\big((x, y), (z, w)\big)}{(x - z)^2 \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \frac{\partial}{\partial w} f(z, w)} dxdz \tag{3.12}$$

と書いたとき, $F\big((x, y), (z, w)\big)$ が x, y, z, w の Sato weight について重さ $(d-2)s$ で斉重な多項式であることも容易にわかる. 上で得られた第 2 種微分形式 η_j の周期のなす行列を

$$[\eta' \;\; \eta''] = \left[\int_{\alpha_i} \eta_j \quad \int_{\beta_i} \eta_j\right]_{i,j=1,2,3} \tag{3.13}$$

と記す. これと (3.3) の行列を結合して

$$M = \begin{bmatrix} \omega' & \omega'' \\ \eta' & \eta'' \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

[1] x と y に依存関係があるので ∂ を使はないで表した.

と書く. このとき M は

$$M\begin{bmatrix} & -1_g \\ 1_g & \end{bmatrix}{}^tM = 2\pi\sqrt{-1}\begin{bmatrix} & -1_g \\ 1_g & \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

を満たす ([Ba], p.97(c), [FK2], Chap.III, [BEL1], p.11, (1.15); Lemma 2.0.1 など参照). これが **一般 Legendre 関係式** (Weierstrass relations) である. 特に ${\omega'}^{-1}\omega''$ は対称行列でである. さらに, 良く知られてゐる様に

$$\mathrm{Im}\,({\omega'}^{-1}\omega'') \quad \text{は正定値行列} \tag{3.16}$$

となつてゐる ([FK2], Chap.III など参照). いま

$$\delta = \begin{bmatrix}\delta' \\ \delta''\end{bmatrix} \in \left(\tfrac{1}{2}\mathbb{Z}\right)^{2g} \tag{3.17}$$

を, C の基点を ∞ としたときの $[\omega'\ \omega'']$ に関して Riemann 定数を与へる theta characteristic ([Mu], pp.163–166, または [BEL1], p.15, (1.18)) とする. 微分形式 (1.41) を見れば C の標準因子類 (canonical divisor class) は $2(g-1)\infty$ になつてゐることがわかるので, 任意の theta characteristic は $\left(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\right)^{2g}$ に属する. 以上の準備の下で,

$$\begin{aligned}\sigma(u) &= \sigma(u; M) = \sigma(u_{\langle w_1\rangle}, u_{\langle w_2\rangle}, \cdots, u_{\langle w_g\rangle}; M) \\ &= c\,\exp(-\tfrac{1}{2}u\eta'{\omega'}^{-1}\,{}^tu)\vartheta[\delta]\,({\omega'}^{-1}\,{}^tu;\ {\omega'}^{-1}\omega'') \\ &= c\,\exp(-\tfrac{1}{2}u\eta'{\omega'}^{-1}\,{}^tu) \\ &\times \sum_{n\in\mathbb{Z}^g}\exp\left[2\pi\sqrt{-1}\left\{\tfrac{1}{2}\,{}^t(n+\delta'){\omega'}^{-1}\omega''(n+\delta') + {}^t(n+\delta')({\omega'}^{-1}u+\delta'')\right\}\right]\end{aligned} \tag{3.18}$$

と定義する[2]. これは (3.16) により収束する. ここに

$$c = \left(\frac{\pi^g}{|\omega'|D}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.19}$$

である. 但し D は (2.21) で定義した判別式, π は円周率, $|\omega'|$ は (3.3) の周期行列の行列式である. また平方根の取り方は後の 3.35 で言及する.

以下では, 与へられた $u \in \mathbb{C}^g$ に対して u' および u'' で

$$u = u'\omega' + u''\omega'' \tag{3.20}$$

となる $\mathbb{R}^g$ の元を示す. このとき $u, v \in \mathbb{C}^g$ と $\ell\ (= \ell'\omega' + \ell''\omega'') \in \Lambda$ について

$$\begin{aligned}L(u,v) &:= {}^tu(\eta'v' + \eta''v''), \\ \chi(\ell) &:= \exp\left\{2\pi\sqrt{-1}\left({}^t\ell'\delta'' - {}^t\ell''\delta' + \tfrac{1}{2}{}^t\ell'\ell''\right)\right\}\ (\in \{1, -1\})\end{aligned} \tag{3.21}$$

とおく. 以上の準備の下で $\sigma(u; M)$ の一般的な重要性質は次の様に述べられる ;

[2]函数 $\sigma(u)$ の定義 (3.18) において 3.5 の fundamental 2-forms of second kind を (3.11) で指定したものから別のものに取り換へ, それに応じて (3.13) の周期行列を再定義したならば, 対応する $\sigma(u)$ は指数函数の部分のみが変ることに注意されたい.

補題 3.22. あらゆる $u \in \mathbb{C}^g$ と $\ell \in \Lambda$, および $\gamma \in \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ について
(1) $\sigma(u+\ell;M) = \chi(\ell)\sigma(u;M)\exp L(u+\frac{1}{2}\ell,\ell)$,
(2) $\sigma(u;\gamma M) = \sigma(u;M)$,
(3) $u \mapsto \sigma(u;M)$ は $\Theta^{[g-1]}$ に 1 位の零を持つ,
(4) また $\sigma(u;M) = 0 \iff u \in \Theta^{[g-1]}$ が成り立つ.

証明 主張 (1) は [Ba], p.286, ℓ.22 の特殊な場合に他ならない. 主張 (2) は γ による M の変換が (2.4) と (2.14) の積分路 α_j, β_j の取り換へに対応してゐることから示される. 詳しくは [BEL1], pp.10–15 を参照されたい. 主張 (3) と (4) は [Ba], p.252 に解説されてゐる. また一部の主張は [BEL1] の p.12, Theorem 1.1 と p.15 にも解説されてゐる. □

補題 3.23. (3.15) と (3.16) を満たす M が与へられたとき, 3.22 (1) の型の函数方程式

(3.24) $$\varphi(u+\ell;M) = \varphi(u;M)\exp[L(u+\tfrac{1}{2}\ell,\ell)+\xi(\ell)]$$

を満たす u に関する整函数 $\varphi(u;M)$ の全体は 1 次元の vector 空間をなし, その自明でない解は 3.22 (2), (3), (4) の性質を持つ. 言ひ換へれば, 固定された M に対し, 6.22 (1) は函数 $\sigma(u)$ 定数倍を除いて特徴付けてゐる.

証明 ここでは Frobenius [Fr] を解説した [L], p.93, Theorem 3.1 により示す. まづ $L(\ ,\ )$ に付随する Riemann 形式

(3.25) $$E(u,v) = L(u,v) - L(v,u)$$

について [Ô1] の Lemma 3.1.2 と同様にして

(3.26) $$\begin{aligned} &E(\sqrt{-1}u,v) = E(\sqrt{-1}v,u) \text{ でこれは正定値形式}, \\ &E(u,v) = 2\pi\sqrt{-1}({}^t u' v'' - {}^t u'' v') \end{aligned}$$

となることが示される. (2) から特に, $E(\ ,\ )$ は $\sqrt{-1}\mathbb{R}$ に値を取り, しかも $\Lambda\times\Lambda$ 上の値の全体は $2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}$ となる. それゆゑ, $E(\ ,\ )$ の Pfaffian は 1 である. 一方

(3.27) $$\xi_0(\ell) = \xi(\ell) + \tfrac{1}{2}L(\ell,\ell)$$

と書くとき, 我々の $\sigma(u)$ は [L] の Chapter VI の記号で空間

(3.28) $$\mathrm{Th}\big(\tfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}L, \tfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\xi_0\big)$$

に属することは容易に確かめられる. 従つて [L], p.93, Theorem 3.1 により, 主張が示される. □

補題 3.22(1), (3), (4) を使つて, [BEL1], p.36 と同様の議論で次を得る:

(3.29) $$\left[\frac{\sigma\Big(\displaystyle\int_\infty^{(x,y)}\omega - \textstyle\sum_{i=1}^g \displaystyle\int_\infty^{(x_i,y_i)}\omega\Big)}{\sigma\Big(\displaystyle\int_\infty^{(x,y)}\omega - \textstyle\sum_{i=1}^g \displaystyle\int_\infty^{(z_i,w_i)}\omega\Big)}\right]\left[\frac{\sigma\Big(\displaystyle\int_\infty^{(z,w)}\omega - \textstyle\sum_{i=1}^g \displaystyle\int_\infty^{(x_i,y_i)}\omega\Big)}{\sigma\Big(\displaystyle\int_\infty^{(z,w)}\omega - \textstyle\sum_{i=1}^g \displaystyle\int_\infty^{(z_i,w_i)}\omega\Big)}\right]^{-1}$$
$$= \exp\left[\int_{(z,w)}^{(x,y)}\left(\sum_{i=1}^g \int_{(z_i,w_i)}^{(x_i,y_i)} R\big((x,y),(z,w)\big)dz\right)dx\right].$$

いま

$$\wp_{ij}(u) = -\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} \log \sigma(u), \quad \wp_{ijk}(u) = -\frac{\partial^3}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} \log \sigma(u), \quad \cdots \tag{3.30}$$

と定義すると, 補題 3.22(1) により $\wp_{ij}(u)$ は Λ を周期に持つ函数であることがわかる. つまり, これらを J 上の函数と思ふことができる. さて, (3.29) から

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{g} \sum_{j=1}^{g} \wp_{ij} \Big(\int_{\infty}^{(x,y)} \omega - \sum_{r=1}^{g} \int_{\infty}^{(x_r,y_r)} \omega \Big) \frac{\omega_i(x,y)}{dx} \frac{\omega_j(x_r,y_r)}{dx_r} \\ &= \frac{F\big((x,y),(x_r,y_r)\big)}{(x-x_r)^2 \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \frac{\partial}{\partial y_r} f(x_r,y_r)} \qquad (r = 1, \cdots, g) \end{aligned} \tag{3.31}$$

を得る.

3.2 Schur-Weierstrass polynomials and sigma functions*

ここではまづ, (2.1) で定義される一般の曲線 C について, 定義多項式 $f(x,y)$ の係数が $\lambda_j = 0$ となる様に退化するときの sigma 函数の極限が Schur-Weierstrass 多項式に一致するといふ事実を紹介する. 具体的には以下の通り:

Proposition with Definition 3.32. 函数 $\sigma(u)$ は $u = (0,0,\cdots,0)$ を中心に Sato weight が $\mathrm{sw}\big(\sigma(u)\big) = (d^2-1)(s^2-1)/24$ である様な斉次な冪級数に展開され, λ_j 達に依存しないある非零定数 ε が存在して

$$\varepsilon\,\sigma(u) \in \mathbb{Q}[\{\lambda_j\}][[\,u_{\langle w_1\rangle}, u_{\langle w_2\rangle}, \cdots, u_{\langle w_g\rangle}\,]] \tag{3.33}$$

となる. また Schur-Weierstrass 多項式 $S(u)$ との間に

$$\varepsilon\,\sigma(u) = S(u) + (d^\circ(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s) \geqq 1) \tag{3.34}$$

が成り立つ. 我々はこの定数 ε が 1 となる様に $\sigma(u)$ を定義する.

証明 いま $x = 1/t^d$ なる local parameter at ∞ を取る. このとき (3.31) の両辺は t の冪級数に展開できるが, その係数を比較すれば, $\wp_{j_1j_2\cdots j_n}(u)$ 達が homogeneous weight であることがわかる. それゆゑ, もし $\sigma(u)$ が homogeneous weight でないとすると矛盾[3]であるから, $\sigma(u)$ は homogeneous weight である. また $\sigma(u)$ の非零定数倍が上の冪級数環に属することは, [N] において証明された. [BEL2] の主結果から, 定数倍を除いて, Schur-Weierstrass 多項式の部分が知られる. これで両辺が定数倍を除いて一致することがわかつた. その定数は一般化された Thomae の公式を利用すれば, [Fr] の方法で決定されると思はれるが, 以下ではあまり重要ではないので, ここでは省略する. □

注意 3.35. (1) $\varepsilon = \pm 1$ のいづれかであると予想される. これが正しいとき $\varepsilon = 1$ となる様に (3.19) の c の平方根を選ぶことにする. この値は以下の議論に影響しない.
(2) $\sigma(u)$ の冪級数展開は, 恐らく $\mathbb{Z}[\lambda_1,\cdots,\lambda_s]$ 上の $u_{\langle w_g\rangle}$, $\cdots$, $u_{\langle w_1\rangle}$ に関する Hurwitz 整な冪級数であらうと思はれる. それゆゑ数論的視点からの研究が待たれる.

補題 3.36. $\sigma(u)$ や $S(u)$ について

$$\sigma([-1]u) = (-1)^c\sigma(u), \qquad S([-1]u) = (-1)^c S(u) \tag{3.37}$$

が成り立つ. 但し, c は $c \equiv \frac{(d^2-1)(n^2-1)}{24} \bmod 2$ なる整数である.

証明 周期格子について $[-1]\Lambda = \Lambda$ が成り立つ. これは各周期 $\ell \in \Lambda$ を与へる積分の積分路を逆にした積分を考へればわかる. このことと 3.23 とを合はせれば, 定数 K が存在して

$$\sigma([-1]u) = K\sigma(u) \tag{3.38}$$

となることがわかる. 一方 3.32 で述べた weight と $[\zeta]$ の作用の weight との整合性, 及び (2.31) を考慮することで, K が主張の形であることがわかる. □

[3] 2 つの式の積を考へるとき, 少くとも一方が非斉重であれば結果も非斉重である. これを利用する.

3.3 Complex multiplication on the sigma function

この節では Schur-Weierstrass 多項式や sigma 函数の固有函数としての性質を説明する．この節では C は (2.24) で定義された purely d-gonal curve とする．従つて，この場合は例へば $\sigma(u)$ は (3.4) の $\Omega\big((x,y),(z,w)\big)$ として

$$\Omega\big((x,y),(z,w)\big) = \frac{1}{(x-z)dy^{d-1}}\sum_{k=1}^{n} y^{d-k}w^{k-1} \tag{3.39}$$

を使つて定義されるのである．このとき $\sigma(u)$ は以下の特別な性質を有する．

補題 3.40. $\zeta = \exp\frac{2\pi\sqrt{-1}}{d}$ とする．$\sigma(u)$ や $S(u)$ について

$$\sigma([-1][\zeta]u) = (-1)^c\zeta^\nu\sigma(u), \qquad S([-1][\zeta]u) = (-1)^c\zeta^\nu S(u) \tag{3.41}$$

が成り立つ．但し，c は $c \equiv \frac{(d^2-1)(n^2-1)}{24} \bmod 2$ なる整数，ν は $\nu \equiv \frac{(d^2-1)(n^2-1)}{24(2g-1)} \bmod d$ なる整数である．

証明 $[-1]$ 倍に関する性質については 3.36 で説明したので，作用 $[\zeta]$ について示す．まづ周期格子について $[\zeta]\Lambda = \Lambda$ が成り立つ．これは作用 $[\zeta]$ が曲線の自己同型から来てゐることにより，積分路に対する ζ の自然な作用を考へれば了解される．このことと 3.23 とを合はせれば，定数 K が存在して

$$\sigma([-1][\zeta]u) = K\sigma(u) \tag{3.42}$$

となることがわかる．一方 3.32 に記した weight と $[\zeta]$ の作用の Sato weight との整合性，及び (2.31) を考慮することで，K が主張の形であることがわかる． □

系 3.43. $(d,s) = (5,6)$ のとき，曲線 C に対応する $\sigma(u)$ や $S(u)$ について

$$\sigma([-1][\zeta]u) = -\sigma(u), \qquad S([-1][\zeta]u) = -S(u) \tag{3.44}$$

が成り立つ．ただし $\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/5)$ である．

4 Riemann singularity theorem*

ここでは函数 $\sigma(u)$ とそれの導函数の零点を Riemann singularity theorem と Brill-Noether 行列を使つて調べる．Riemann singularity theorem を我々の記号で述べれば次の様になる．

命題 4.1. (Riemann singularity theorem) 与へられた $u \in \kappa^{-1}(\Theta^{[g-1]})$ に対して u modulo Λ に対応する曲線 C 上の因子を $P_1 + \cdots + P_{g-1} - (g-1)\cdot\infty$ と書くことにする．このとき

$$\dim \varGamma(C, \mathscr{O}(P_1 + \cdots + P_{g-1})) = r + 1 \tag{4.2}$$

となるための必要十分条件は以下の 2 つが同時に成立することである：
(1) すべての $h \leqq r$ とすべての $i_1, \cdots, i_h \in \{w_g, w_{g-1}, \cdots, w_2, w_1\}$ について
$\sigma_{\langle i_1 i_2 \cdots i_h\rangle}(u) = 0,$
(2) ある $(r+1)$ 個の組からなる添字 $\langle i_1, i_2, \cdots, i_{r+1}\rangle$ が存在して
$\sigma_{\langle i_1 i_2 \cdots i_{r+1}\rangle}(u) \neq 0.$

証明 Theta 級数と sigma 函数の関係 (3.18) を利用すれば, この主張は [ACGH], pp.226–227 にある主張から直ちに導かれる． □

上の $\dim \varGamma(C, \mathscr{O}(P_1 + \cdots + P_{g-1}))$ を計算するために Brill-Noether 行列なるものを以下の様に定義する．話を明確にするために C の各点 P に於ける local parameter t を

$$t = \begin{cases} y & \text{if } y(P) = 0, \\ x - x(P) & \text{if } y(P) \neq 0 \text{ and } P \neq \infty, \\ x^{-1/d} & \text{if } P = \infty \end{cases} \tag{4.3}$$

と定める．さらに $P(t)$ で C 上の P の近傍にあつて, そこで上の local parameter の値が t である点を表す．また Ω^1 で第 1 種微分形式のなす層を表す．各 $\mu \in \varGamma(C, \Omega^1)$ に対して

$$I^\ell \mu(P) = \frac{d^{\ell+1}}{dt^{\ell+1}} \int_\infty^{P(t)} \mu \Big|_{t=0} \tag{4.4}$$

とおく．これは t の取り方に依存するが以下の議論ではそのことは問題にならないので, 左辺の記号には t を入れないことにする．μ は正則であるから $I^\ell\mu(P)$ は任意の P において有限の値を取る．P_j 達を <u>異る点</u> とし, 正因子 (an effective divisor) $D := \sum_{j=1}^k n_j P_j$ $(n_j > 0)$ を考へる．$\deg D := \sum n_j$ 列 g 行の行列でその $(n_1 + \cdots + n_{j-1} + \ell, i)$ 成分が $I^\ell \omega_i(P_j)$ である様なものを D に対する **Brill-Noether 行列**と呼び,

$$B(D) \tag{4.5}$$

と記す．但し $1 \leqq \ell \leqq n_j$ で ω_i は (2.5) で定義したものである．我々の計算は次の命題に基づく．

命題 4.6. いま D を C の正因子とする．このとき

$$\dim \mathit{\Gamma}(C, \mathscr{O}(D)) = \deg D + 1 - \mathrm{rank} B(D) \tag{4.7}$$

が成り立つ．

証明 各 $\mu \in \mathit{\Gamma}(C, \Omega^1)$ に対し，一意的に $c_1, \cdots, c_g \in \mathbb{C}$ が定まつて $\mu = c_1\omega_1 + \cdots + c_g\omega_g$ と書ける．ここで $D = \sum_{j=1}^{k} n_j P_j$ とおくとき，3 つの主張：

(9.6a) $\mu \in \mathit{\Gamma}(C, \Omega^1(-D))$,
(9.6b) $\delta^\ell \mu(P_j) = 0$ for all j and ℓ with $1 \leqq j \leqq k$ and $1 \leqq \ell \leqq n_j$, and
(9.6c) $B(D) \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

は同値である．従つて

$$\dim \mathit{\Gamma}(C, \Omega^1(-D)) = g - \mathrm{rank} B(D) \tag{4.8}$$

である．Riemann-Roch の定理から

$$\dim \mathit{\Gamma}(C, \mathscr{O}(D)) = \deg D - g + 1 + \dim \mathit{\Gamma}(C, \Omega^1(-D)) \tag{4.9}$$

であるので $\dim \mathit{\Gamma}(C, \mathscr{O}(D)) = \deg D + 1 - \mathrm{rank} B(D)$ を得る． □

この命題は後で 7.5 や 7.9 で使ふ．

5 Derivatives of $\sigma(u)$ and the stratification*

5.1 Special derivatives

定義 5.1. 第 k 階層に付随した (attached) Sato weight といふものを

$$\mathrm{aw}(k) = \sum_{j=1}^{g-k} (w_j - j + 1) \tag{5.2}$$

で定める (1.19 を参照).

例 5.3. $(d, s) = (5, 6)$ のとき $\mathrm{aw}(k)$ は以下のやうになる.

(5.4)

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathrm{aw}(k)$	25	19	13	10	7	4	3	2	1	0

Let I be a repeated combination of the set $\mathbf{Weier}_{d,s} = \{w_g, w_{g-1}, \cdots, w_2, w_1\}$. We call such I an multi-index for the pair (d, s). **添字集合**と呼ぶのであつた (1.26 を見よ). 繰り返すが, この論文では $I = \langle 4332111 \rangle$ などと必ず $\langle\ \rangle$ を付けて記す.

定義 5.5. 添字集合 I について対応する σ の 導函数 σ_I を

$$\sigma_I(u) = \left(\prod_{i \in I} \frac{\partial}{\partial u_{\langle i \rangle}} \right) \sigma(u) \tag{5.6}$$

と定義する. もちろん重複した $i \in I$ については重複しただけの階数の偏導函数を考へてゐる.

定義 5.7. I を上の定義の意味での添字集合とする. このとき $\mathrm{sw}(I)$ で, I に属する数の単純な和を表すことにする. sw は Sato weight の意である.

定義 5.8. (1.29 の再掲) 記号 $\natural^n$ は $\mathrm{sw}(\natural^n) = \mathrm{aw}(n)$ なる多重添字であつて, $S_{\natural^n}(u)$ が $\kappa^{-1}(\mathit{\Delta}^{[n]})$ 上で自明ではなく, かつ, これと同じ Sato weight を持つものを多重添字の全体を辞書式順序で並べたとき, 与ふ限り後方に来るものを表すものとする. 特に $\natural^1$ と $\natural^2$ は多用するので $\sharp = \natural^1$, $\flat = \natural^2$ と書く.

ここで $(d, s) = (5, 6)$ の場合の定義を表に記しておく (1.29 も参照されたい).

定義 5.9. $\sigma(u)$ のいくつかの特殊な偏導函数に下記のやうに記号を付ける.

(5.10)

$\sigma_\sharp$	$\sigma_\flat$	$\sigma_{\natural^3}$	$\sigma_{\natural^4}$	$\sigma_{\natural^5}$	$\sigma_{\natural^6}$	$\sigma_{\natural^7}$	$\sigma_{\natural^8}$	$\sigma_{\natural^9}$	$\sigma_{\natural^n} (n \geqq 10)$
$\sigma_{\langle 4,8,13 \rangle}$	$\sigma_{\langle 379 \rangle}$	$\sigma_{\langle 148 \rangle}$	$\sigma_{\langle 37 \rangle}$	$\sigma_{\langle 7 \rangle}$	$\sigma_{\langle 4 \rangle}$	$\sigma_{\langle 3 \rangle}$	$\sigma_{\langle 2 \rangle}$	$\sigma_{\langle 1 \rangle}$	σ
σ_{753}	σ_{864}	$\sigma_{10,7,5}$	σ_{86}	σ_6	σ_7	σ_8	σ_9	σ_{10}	σ

このとき, $\sigma(u)$ の導函数について次の主張が成立する事は確実と思はれる.

Working Hypothesis 5.11. *I を上の定義の意味での添字集合とする. このとき次が成り立つ.*
(1) $\mathrm{sw}(I) < \mathrm{aw}(n)$ ならば $\sigma_I(\kappa^{-1}(\Theta^{[n]})) = 0$ である.
(2) $\mathrm{sw}(I) = \mathrm{aw}(n)$ とする. σ_I は $\Theta^{[n]}$ 上で translational relation

$$\sigma_I(u+\ell) = \sigma_I(u)\exp[L(u+\tfrac{1}{2},\ell)+\xi(\ell)] \tag{5.12}$$

を満たす. このとき (1) より $\sigma_I(\kappa^{-1}(\Theta^{[n-1]})) = 0$ となるが, もし σ_I が $\kappa^{-1}(\Theta^{[n]})$ 上の零函数でないならば, $u \in \kappa^{-1}(\Theta^{[n]})$ に対し $\sigma_I(u) = 0 \iff u \in \kappa^{-1}(\Theta^{[n-1]})$, 特に

$$\sigma_{\natural^n}(u) = 0 \iff u \in \kappa^{-1}(\Theta^{[n-1]}) \tag{5.13}$$

である.
(3) $u \in \kappa^{-1}(\Theta^{[n]})$ のとき

$$\sigma_{\natural^n}(u+\ell) = \sigma_{\natural^n}(u)\exp[L(u+\tfrac{1}{2},\ell)+\xi(\ell)] \tag{5.14}$$

が成り立つ. 但し $L(\cdot,\cdot)$ と $\xi(\cdot)$ は (3.21) で定義したそれである.
(4) $1 \leqq n \leqq g$ とする. $u \in \kappa^{-1}(\Theta^{[n]})$, $v \in \kappa^{-1}\iota(C)$ のとき

$$\sigma_{\natural^{n+1}}(u+v) = \sigma_{\natural^n}(u){v_{\langle 1\rangle}}^{w_n+n-1} + \big(d^\circ(v_{\langle 1\rangle}) \geqq w_n+n\big) \tag{5.15}$$

と展開される.

定理 5.16. 上の 5.11 は下記の場合には成立する:

$$\begin{aligned}(d,s) = {}&(2,2g+1)\ \ (g \geqq 1),\\ &(3,4),\ (3,5),\ (3,7),\ \text{etcetera},\\ &(5,6),\ \text{etcetera}.\end{aligned} \tag{5.17}$$

注意 5.18. $(d,s) = (2,2g+1)$ については [Ô4] で, $(d,s) = (3,4)$ については [Ô5] で証明されてをり, 同様の方法でひとつひとつの $(3,s)$ についても証明できる. またこの論文で $(d,s) = (5,6)$ の場合を扱ふ. しかるに, 一気に一般の (d,s) について実行する為にはもう少し考察が必要である.

さて, この論文では 5.11 を示すのに <u>剥離法</u> なるものを用いる. 恐らく, 最も洗練されたやり方は, translational relation の解空間が 1 次元であることなどをうまく利用して, Schur-Weierstrass 多項式の行列式表示に帰着させることだと思はれるが, 現時点では考察が不十分であるためにさうできない. 今回は周辺部分も込めた "眺めを提供する" ことにしたい. それで, 剥離法を実行すると添付した表の様な結果を得る. これらも上記の idea で導けると思はれるが.

注意 5.19. (1) $\mathrm{sw}(I) = 0$ となるのは $I = \langle\rangle$ の場合のみなので上記の定理は $\sigma(u)$ が $\mathbb{C}^g = \kappa^{-1}(\Theta^{[g]})$ 上で translational relation を満たし, $\sigma(\Theta^{[g-1]}) = 0$ となることを示してゐる. これらは 3.22 に他ならない.
(2) $\mathrm{sw}(I) = 1$ となるのは $I = \{1\}$ の場合のみなので上記の定理は $\sigma_{\langle g-1\rangle}(u)$ が $\Theta^{[g-1]}$ 上で translational relation を満し, $\sigma_{\langle 1\rangle}(\Theta^{[g-2]}) = 0$ が成り立つことを示してゐる.
(3) $\mathrm{sw}(I) > 1$ については添付の表に示す計算結果から証明される.

Table 5.20. (Table of $\sigma_I(\Theta^{[n]})$)

$*$: There exist some I such that $\sigma_I(u)$ is not "identically zero" on $\Theta^{[n]}$.

trans. rel. : $\sigma_I(u)$ satisfies the translational relation, namely $\sigma_I(u+\ell) = \sigma_I(u)\exp L(u+\frac{1}{2}\ell, \ell)$ for $u \in \Theta^{[n]}$ and $\ell \in \Lambda$.

$(d, s) = (3, 4), \quad g = 3$

aw(·)	sw(I)\n	Stratum			
		0	1	2	3
aw(1)	2	0	trans. rel.	*	*
aw(2)	1	0	0	trans. rel.	*
aw(2)	0	0	0	0	trans. rel.

$(d, s) = (3, 5), \quad g = 4$

aw(·)	sw(I)\n	Stratum				
		0	1	2	3	4
aw(1)	4	0	trans. rel.	*	*	*
	3	0	0	*	*	*
aw(2)	2	0	0	trans. rel.	*	*
aw(3)	1	0	0	0	trans. rel.	*
aw(4)	0	0	0	0	0	trans. rel.

$(d, s) = (3, 7), \quad g = 6$

aw(·)	sw(I)\n	Stratum						
		0	1	2	3	4	5	6
aw(1)	10	0	trans. rel.	*	*	*	*	*
	9	0	0	*	*	*	*	*
	8	0	0	*	*	*	*	*
	7	0	0	*	*	*	*	*
aw(2)	6	0	0	trans. rel.	*	*	*	*
	5	0	0	0	*	*	*	*
aw(3)	4	0	0	0	trans. rel.	*	*	*
	3	0	0	0	0	*	*	*
aw(4)	2	0	0	0	0	trans. rel.	*	*
aw(5)	1	0	0	0	0	0	trans. rel.	*
aw(6)	0	0	0	0	0	0	0	trans. rel.

$(d, s) = (5, 6), \quad g = 10$

aw(·)	sw(I)\n	Stratum										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
aw(1)	25	0	trans. rel.	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	24	0	0	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	23	0	0	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	22	0	0	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	21	0	0	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	20	0	0	*	*	*	*	*	*	*	*	*
aw(2)	19	0	0	trans. rel.	*	*	*	*	*	*	*	*
	18	0	0	0	*	*	*	*	*	*	*	*
	17	0	0	0	*	*	*	*	*	*	*	*
	16	0	0	0	*	*	*	*	*	*	*	*
	15	0	0	0	*	*	*	*	*	*	*	*
	14	0	0	0	*	*	*	*	*	*	*	*
aw(3)	13	0	0	0	trans. rel.	*	*	*	*	*	*	*
	12	0	0	0	0	*	*	*	*	*	*	*
	11	0	0	0	0	*	*	*	*	*	*	*
aw(4)	10	0	0	0	0	trans. rel.	*	*	*	*	*	*
	9	0	0	0	0	0	*	*	*	*	*	*
	8	0	0	0	0	0	*	*	*	*	*	*
aw(5)	7	0	0	0	0	0	trans. rel.	*	*	*	*	*
	6	0	0	0	0	0	0	*	*	*	*	*
	5	0	0	0	0	0	0	*	*	*	*	*
aw(6)	4	0	0	0	0	0	0	trans. rel.	*	*	*	*
aw(7)	3	0	0	0	0	0	0	0	trans. rel.	*	*	*
aw(8)	2	0	0	0	0	0	0	0	0	trans. rel.	*	*
aw(9)	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	trans. rel.	*
aw(10)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	trans. rel.

5.2 Table of derivatives of sigma functions*

ここで 5.8 で定義した $\sigma_{\natural^n}(u)$ が具体的にどうなつてゐるかを表にして示しておく. 超楕円曲線の場合, つまり $d=2$ の場合は [Ô4] にある様に, 単純な規則があるが, $d \geqq 3$ の場合は, 今のところ, その様な言ひ換へができてゐない.

(5.21) Table of $\natural^n$

(d,s)	g	$\sharp=\natural^1$	$\flat=\natural^2$	$\natural^3$	$\natural^4$	$\natural^5$	$\natural^6$	$\natural^7$	$\natural^8$	$\natural^9$	$\natural^{10}$	$\natural^{11}$	$\natural^{12}$	$\cdots$
$(2,3)$	1	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\cdots$
$(2,5)$	2	$\langle 1\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\cdots$
$(2,7)$	3	$\langle 3\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\cdots$
$(2,9)$	4	$\langle 1,5\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\cdots$
$(2,11)$	5	$\langle 3,7\rangle$	$\langle 1,5\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\cdots$
$(2,13)$	6	$\langle 1,5,9\rangle$	$\langle 3,7\rangle$	$\langle 1,5\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\cdots$
$(2,15)$	7	$\langle 3,7,11\rangle$	$\langle 1,5,9\rangle$	$\langle 3,7\rangle$	$\langle 1,5\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
$(3,4)$	3	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\cdots$
$(3,5)$	4	$\langle 4\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\cdots$
$(3,7)$	6	$\langle 2,8\rangle$	$\langle 1,5\rangle$	$\langle 4\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\cdots$
$(3,9)$	7	$\langle 4,10\rangle$	$\langle 2,7\rangle$	$\langle 1,5\rangle$	$\langle 4\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\cdots$
$(3,10)$	9	$\langle 4,8,14\rangle$	$\langle 1,7,11\rangle$	$\langle 4,8\rangle$	$\langle 2,7\rangle$	$\langle 1,5\rangle$	$\langle 4\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
$(5,6)$	10	$\langle 3,8,14\rangle$	$\langle 2,4,13\rangle$	$\langle 1,3,9\rangle$	$\langle 2,8\rangle$	$\langle 7\rangle$	$\langle 4\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\cdots$
$(5,7)$	12	$\langle 1,6,11,18\rangle$	$\langle 4,8,16\rangle$	$\langle 2,6,13\rangle$	$\langle 1,4,11\rangle$	$\langle 3,9\rangle$	$\langle 1,8\rangle$	$\langle 6\rangle$	$\langle 4\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle\,\rangle$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

6 Statement of the main result

Conjecture 6.1. 整数 $n \geqq 2$ に対し, 次が成り立つ:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sigma_{\natural^n}(u^{(1)}+u^{(2)}+\cdots+u^{(n)})\prod_{1\leqq i<j\leqq n}\prod_{\nu=1}^{d-1}\sigma_{\flat}(u^{(i)}+[\zeta^{\nu}]u^{(j)})}{\prod_{j=1}^{n}\sigma_{\sharp}(u^{(j)})^{(d-1)(n-1)+1}} \\
&\qquad = \pm \Big|(x^{a_j}y^{b_j})(u^{(i)})\Big|_{1\,\leqq\, i,j\,\leqq\, n} \cdot \Big|(x^{j-1})(u^{(i)})\Big|_{1\,\leqq\, i,j\,\leqq\, n}^{d-2}.
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

ここで符号 “±” は, この等式において, すべての λ_j を 0 とすることで得られる等式の符号であり, このとき $\sigma_{\natural^n}(u)$ が $S_{\natural^n}(u)$ になることから (1.36) 等により計算できる.

これが示されれば, 直ちに次が示される.

系 6.3. （Kiepert 型公式）6.1 が成り立てば $n \geqq g$ で $u \in \kappa^{-1}\iota(C)$ のとき, 次の等式が成り立つ：

$$
\psi_n(u) := \frac{\sigma(nu)}{\sigma_{\sharp}(u)^{n(d-1)(n-1)+n}} = \pm\, y^{n(n-1)/2}(u)\cdot\Big|(x^{a_j}y^{b_j})^{(i-1)}\Big|_{2\,\leqq\, i,j\,\leqq\, n}(u).
\tag{6.4}
$$

但し $^{(i)}$ は $(\mathrm{d}/\mathrm{d}u_{\langle 1\rangle})^i$ を意味し, 行列式は $(n-1)\times(n-1)$ 型である. また, 符号 “±” は, この等式において, すべての λ_j を 0 とすることで得られる等式の符号であり, このとき $\sigma_{\natural^n}(u)$ が $S_{\natural^n}(u)$ になることから (1.36) 等により計算できる.

定理 6.5. 上の 6.1（と 6.3）は $(d,s)=(2,2g+1)$（$g\geqq 0$）, $(3,4)$, $(3,5)$, $(5,6)$ などについては正しい.

これの $(d,s)=(5,6)$ の場合の証明はに第 8 節で行なふ. 一般の場合はそれと同様になされるはずである. 個別には [Ô2], [Ô3], [Ô4], および [Ô5] などを参照されたい.

7 Proof of the main theorem

7.1 The peeling method*

表 9.5 から 表 9.18 について, その見方を説明する.

(1) 第 1 列は第 2 列の函数に付した $\langle\ \rangle$ 内の添字の Sato weight の和を示す.
(2) 第 2 列 $\langle ij\cdots\ell\,\rangle$ は $\sigma_{\langle ij\cdots\ell\rangle}$ を示す.
(3) 第 3 列に唯 1 つの数字があれば, それは第 2 列が示す函数が恒等的に消える $\Theta^{[k]}$ の内最大の k を示し, 3 つの数が順に k, $\langle jk\cdots m\rangle$, c とあれば, それは第 2 列の函数が $\Theta^{[k]}$ 上で $\sigma_{\langle jk\cdots m\rangle}$ の c 倍に一致することを示す.

表 9.11 の最初にある

Weight	Function	Stratum	$\langle 1111\rangle$	$\langle 211\rangle$	$\langle 22\rangle$	$\langle 31\rangle$	$\langle 4\rangle$
1	$\langle 1\rangle$	8	1/3!	2/2!/2	0	1/1!/3	0

を例に取つて説明する. まづ第 2 欄の $\langle 1\rangle$ は $\sigma_{\langle 1\rangle}$ を示す. この函数は $u_{\langle 1\rangle}$ による導函数として得られたものであるが, 第 1 欄にはこの $u_{\langle 1\rangle}$ の Sato weight 1 が記されてゐる. 第 3 欄は

(7.1) $$\sigma_{\langle 1\rangle}(u)=0 \quad (u\in\Theta^{[8]} \text{ のとき})$$

であることを意味し, それ以降の欄は $\sigma_{\langle 1\rangle}(u^{[7]}+v)$ $(v\in\Theta^{[1]})$ を $v_{\langle 1\rangle}$ で展開したときに ${u_{\langle 1\rangle}}^3$ の項が

(7.2) $$\sigma_{\langle 1\rangle}(u^{[7]}+v)=\cdots+\left(\tfrac{1}{3!}\sigma_{\langle 1111\rangle}+\tfrac{2}{3!\cdot 2}\sigma_{\langle 211\rangle}+\tfrac{1}{1!\cdot 3}\sigma_{\langle 31\rangle}\right)(u^{[7]}){u_{\langle 1\rangle}}^3+\cdots$$

となることを示すのである. もうひとつ例を挙げる. 同じく表 9.10 の第 6 番目の行

Weight	Function	Stratum	$\langle 11111\rangle$	$\langle 2111\rangle$	$\langle 221\rangle$	$\langle 32\rangle$	$\langle 311\rangle$	$\langle 41\rangle$
3	$\langle 21\rangle+\langle 3\rangle$	7	0	1/2!	1/1!/2	1/2!	1/1!/2	0

の $\langle 21\rangle$ は $\sigma_{\langle 21\rangle}$ を示す. この函数は $\partial^2/\partial u_{\langle 2\rangle}\partial u_{\langle 1\rangle}$ による 導函数として得られたものであるので, 第 1 欄にはこの $u_{\langle 2\rangle}$ の Sato weight 2 と $u_{\langle 1\rangle}$ の Sato weight 1 の和, つまり 3 が記されてゐる. 第 3 欄は表 9.5 による

(7.3) $$\sigma_{\langle 21\rangle}(u)+\sigma_{\langle 3\rangle}(u)=0 \quad (u\in\Theta^{[7]} \text{ のとき})$$

を意味し, それ以降の欄は $\sigma_{\langle 111\rangle}(u^{[6]}+v)$ $(v\in\Theta^{[1]})$ を $v_{\langle 1\rangle}$ で展開したときに ${u_{\langle 1\rangle}}^3$ の項が

(7.4) $$0=\sigma_{\langle 21\rangle}(u^{[6]}+v)+\sigma_{\langle 3\rangle}(u^{[6]}+v)=\cdots+\left(\tfrac{1}{1/2!}\sigma_{\langle 2111\rangle}(u^{[6]})+\cdots\right){v_{\langle 1\rangle}}^2+\cdots$$

の ${v_{\langle 1\rangle}}^2$ の係数を拾つたものを示してゐる.

最も注意を要するのは第 3 欄の内容であつて, これはそれ以前の表による計算の結果に基いて記入される. それ以外の欄は特に難しいことはない. 特に, 第 4 欄以降は Taylor 展開の知識しか使つてゐない.

いづれの場合もこれらの表を行列と見て, それの表す線型写像の核を計算することで, 第 2 列に並んだ函数達の 1 次関係を得ることができる. その結果が最下段に記入されてゐる.

7.2 Derivative of $\sigma(u)$ attached to the first stratum*

The following proposition is initial part of 5.11.

命題 7.5. $(d,s)=(5,6)$ なる代数曲線 C (種数 $g=10$) に対して, 作業仮説 5.11 が $n=1$ で成立する. 即ち, $\sharp=\langle 4,8,13\rangle$ について

(1) $\sigma_\sharp(\kappa^{-1}(\Theta^{[1]}))$ は恒等的には 0 でない;
(2) $v\in\kappa^{-1}(\Theta^{[1]})$ とするとき, $\sigma_\sharp(v)=0 \iff v\in\Lambda$ となる;
(3) $u\in\kappa^{-1}(\Theta^{[1]})$ のとき

$$\sigma_\sharp(u+\ell)=\sigma_\sharp(u)\exp[L(u+\tfrac{1}{2},\ell)+\xi(\ell)] \tag{7.6}$$

が成り立つ (但し $L(\cdot,\cdot)$ と $\xi(\cdot)$ は (3.21) で定義したものである) ;
(4) $v\in\kappa^{-1}\iota(C)$ のとき

$$\sigma_\sharp(v)=-{v_{\langle 1\rangle}}^{10}+\big(d^\circ(v_{\langle 1\rangle})\geqq 11\big) \tag{7.7}$$

と展開される.

証明 いま $Q\in C$ を generic な v modulo Λ に対応する点とすれば, $D=Q+8\infty$ に対する Brill-Noether $B(D)$ 行列は (4.4) の記号を使つて,

$$\begin{bmatrix} I^1\omega_{\langle 19\rangle}(v) & I^1\omega_{\langle 14\rangle}(v) & I^1\omega_{\langle 13\rangle}(v) & I^1\omega_{\langle 9\rangle}(v) & I^1\omega_{\langle 8\rangle}(v) & I^1\omega_{\langle 7\rangle}(v) & I^1\omega_{\langle 4\rangle}(v) & I^1\omega_{\langle 3\rangle}(v) & I^1\omega_{\langle 2\rangle}(v) & I^1\omega_{\langle 1\rangle}(v) \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \tag{7.8}$$

であり, その rank は $\operatorname{rank}B(D)=7$ である. 従つて 4.6 により $\dim\varGamma(C,\mathscr{O}(D))=3$. よつて 4.1 により, 任意の j_1, j_2 に対して $\sigma_{\langle j_1j_2\rangle}(v)=0$. ゆゑに translational relation が $\sigma_{\langle 13,8,4\rangle}(v)$ について成立し, 偏角の原理, 即ち, translational relation の対数を取つたものを, 曲線 C に対応する Riemann 面の基本多角形の周囲に沿つて通常の方法で積分することによつて, この函数の零点は modulo Λ で重複度も込めて丁度 10 個となることがわかる. 一方 $S_{\langle 13,8,4\rangle}(v)=-{v_{\langle 1\rangle}}^{10}$ なので, $\sigma_{\langle 13,8,4\rangle}(v)$ は零函数ではなく, 全ての零点は原点に集中してゐることがわかる. □

7.3 The formula for $n = 2$

The following proposition is half of the 2nd layer of 5.11.

命題 7.9. $\kappa^{-1}(\Theta^{[1]})$ 上の函数 $v \mapsto \sigma_\flat(u^{(1)} + v)$ の因子は modulo λ で定まり, 格子 Λ の各点において 6 位の零, modulo Λ で $[\zeta^j]u^{(1)}$ $(j = 1, \cdots, 4)$ に合同となる各点で 1 位の零を持ち, それ以外の点では消えない. さらに

$$\sigma_\flat(u^{(1)} + v) = \sigma_\sharp(u^{(1)}) {v_{\langle 1 \rangle}}^6 + \cdots \tag{7.10}$$

と展開される.

証明 ここでは $u^{(1)} = u$ と略記する.
<u>第 1 段</u>. P_1, $Q \in C$ をそれぞれ $u = u^{(1)}$, v modulo Λ に対応する点とする. 因子 $D = P_1 + Q + 7\infty$ に対する Brill-Noether 行列 $B(D)$ は

$$\begin{bmatrix} I^1\omega_{\langle 19\rangle}(u) & I^1\omega_{\langle 14\rangle}(u) & I^1\omega_{\langle 13\rangle}(u) & I^1\omega_{\langle 9\rangle}(u) & I^1\omega_{\langle 8\rangle}(u) & I^1\omega_{\langle 7\rangle}(u) & I^1\omega_{\langle 4\rangle}(u) & I^1\omega_{\langle 3\rangle}(u) & I^1\omega_{\langle 2\rangle}(u) & I^1\omega_{\langle 1\rangle}(u) \\ I^1\omega_{\langle 19\rangle}(v) & I^1\omega_{\langle 14\rangle}(v) & I^1\omega_{\langle 13\rangle}(v) & I^1\omega_{\langle 9\rangle}(v) & I^1\omega_{\langle 8\rangle}(v) & I^1\omega_{\langle 7\rangle}(v) & I^1\omega_{\langle 4\rangle}(v) & I^1\omega_{\langle 3\rangle}(v) & I^1\omega_{\langle 2\rangle}(v) & I^1\omega_{\langle 1\rangle}(v) \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \end{bmatrix} \tag{7.11}$$

であり, $\operatorname{rank} B(D) = 7$ である. 従つて 4.6 と 4.1 により, 任意の j_1, j_2 について $\sigma_{\langle j_1 j_2\rangle}(u + v) = 0$. 但し, これは剥離法によつても得られる. ゆゑに translational relation が $\sigma_{\langle 973\rangle}(u + v)$ について成立し, 偏角の原理によつて, $\kappa^{-1}\iota(C)$ 上の函数 $v \mapsto \sigma_{\langle 973\rangle}(u + v)$ の零点は modulo Λ で重複度も込めて丁度 10 個となる.
<u>第 2 段</u>. いま $u \in \kappa^{-1}\iota(C)$ と $v \in \kappa^{-1}\iota(C)$ の函数

$$\frac{\sigma_\flat(u + v)\sigma_\flat(u + [\zeta]v)\sigma_\flat(u + [\zeta^2]v)\sigma_\flat(u + [\zeta^3]v)\sigma_\flat(u + [\zeta^4]v)}{\sigma_\sharp(u)^5\sigma_\sharp(v)^5} \tag{7.12}$$

を考へる. 7.5 から, (7.12) を v (または u) のみの函数とみたとき, 原点にのみ極を持ち, その位数は $10 \times 5 - 6 \times 5 = 20$ である. これの各因子について translational formula が成立することとから, この函数は u と v のそれぞれについて Λ に関して完全に周期的である. また, ひとつの因子 (factor) , 例へば $v \mapsto \sigma_\flat(u + [\zeta]v)$ で v_0 が零点ならば $[\zeta^k]v_0$ が別の因子 $v \mapsto \sigma_\flat(u + [\zeta^{1-k}]v)$ の零点であるから, 函数 (7.12) を u と v のそれぞれについて C 上の函数と見たとき, その因子 (divisor) は単位元に線形同値である ($\because 1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = 0$) . 従つて $x(u)$, $y(u)$, $x(v)$, $y(v)$ の有理式でなければならない (Abel-Jacobi の定理) . さらに, 極の位置を見れば, これらの多項式でなくてはならない. またこの函数は補題 2.29 より $v \mapsto [\zeta^\nu]v$ $(u \mapsto [\zeta^\nu]u)$ なる変換で不変であり, 入れ替へ $u \leftrightarrow v$ についても不変である. さらに佐藤重さに関して斉次である. よつて (7.12) は $x(v)$ と $x(u)$ の 4 次対称式であることがわかる.
<u>第 3 段</u>. 一方

$$S_{\langle 973\rangle}(u + v) = {u_{\langle 1\rangle}}^{10}{v_{\langle 1\rangle}}^6 + {u_{\langle 1\rangle}}^9{v_{\langle 1\rangle}}^7 + {u_{\langle 1\rangle}}^8{v_{\langle 1\rangle}}^8 + {u_{\langle 1\rangle}}^7{v_{\langle 1\rangle}}^9 + {u_{\langle 1\rangle}}^6{v_{\langle 1\rangle}}^{10} \tag{7.13}$$

なので, $\sigma_\flat(u+v)=\sigma_{\langle 973\rangle}(u+v)$ は零函数ではなく, 原点が 6 位の零であることがわかる.
<u>第 4 段</u>. さて (7.12) で $u=v$ としたときの

$$u\mapsto\frac{\sigma_\flat(2u)\sigma_\flat(u+[\zeta]u)\sigma_\flat(u+[\zeta^2]u)\sigma_\flat(u+[\zeta^3]u)\sigma_\flat(u+[\zeta^4]u)}{\sigma_\sharp(u)^{10}} \tag{7.14}$$

は (7.13) からわかるやうに, 分子の第 1 因子は 16 次であるが, 第 1 因子以外の因子は 26 次以上の項からなる. よつてこの式は $u_{\langle 1\rangle}$ の $(16+26\times 4)-10\times 10=120-100=20$ 次以上の項からなる級数である. それが $x(u)$ の多項式であるので, 結局恒等的に 0 でなくてはならない. つまり函数

$$v\mapsto\frac{\sigma_\flat(u+v)\sigma_\flat(u+[\zeta]v)\sigma_\flat(u+[\zeta^2]v)\sigma_\flat(u+[\zeta^3]v)\sigma_\flat(u+[\zeta^4]v)}{\sigma_\sharp(u)^5\sigma_\sharp(v)^5} \tag{7.15}$$

は $v=u$ で消える.
<u>第 5 段</u>. 以上から (7.14) の分子の因子の内, (第 1 因子以外の) 少なくとも一つは $v=u$ 消える. それを例へば

$$v\mapsto\sigma_\flat(u+[\zeta]v) \tag{7.16}$$

としてみよう. これは任意の $u_{\langle 1\rangle}$ について

$$\begin{aligned}0&=\sigma_\flat(u+[\zeta]v)\big|_{v=u}\\&=\big(\sigma_\flat(u+[\zeta]v)-S_\flat(u+[\zeta]v)\big)\big|_{v=u}\\&=\big(c_{11,15}\lambda_1^2{u_{\langle 1\rangle}}^{15}(\zeta v_{\langle 1\rangle})^{11}+\cdots\big)\big|_{v=u}\quad(c_{k,\ell}\in\mathbb{Q})\end{aligned} \tag{7.17}$$

なる等式が成立することを意味する. これは不定元 $\lambda_1,\,\cdots,\,\lambda_6,\,u_{\langle 1\rangle}$ についての等式であるから ζ を ζ^h $(h=2,\,3,\,4)$ で置き換へても成り立つ. ちなみに, これはすべての $c_{k,\ell}=0$ となることを意味するわけではない. 例へば

$${u_{\langle 1\rangle}}^{15}{v_{\langle 1\rangle}}^{11}={u_{\langle 1\rangle}}^{14}{v_{\langle 1\rangle}}^{12}={u_{\langle 1\rangle}}^{13}{v_{\langle 1\rangle}}^{13}=\cdots,\ (v=u\text{ のとき}) \tag{7.18}$$

などに注意. このやうにして (7.16) が $v=u,\,[\zeta]u,\,[\zeta^2]u,\,[\zeta^3]u$ の 4 点で消えることがわかつた. このことは $v\mapsto\sigma_\flat(u+[\zeta^j]v)$ が $v=[\zeta^i]u$ $(i+j\not\equiv 0 \bmod 5)$ の 4 点で消えることも示してゐる. 以上に第 1 段の考察等を加味すれば (7.16) が $(0,\cdots,0)$ modulo Λ で 6 位の零点, $[\zeta]u,\,[\zeta^2]u,\,[\zeta^3]u,\,[\zeta^4]u$ modulo Λ の各点で 1 位の零点を持つことがわかつた. 他の factor についても同様である. □

以上を総合すれば, (7.12) が $\big(x(u)-x(v)\big)^4$ でなくてはならないことがわかる. つまり, 次の系が示された.

系 7.19. 変数 u と v は共に $\kappa^{-1}\iota(C)$ 上にあるとする. このとき

$$\frac{\sigma_\flat(u+v)\sigma_\flat(u+[\zeta]v)\sigma_\flat(u+[\zeta^2]v)\sigma_\flat(u+[\zeta^3]v)\sigma_\flat(u+[\zeta^4]v)}{\sigma_\sharp(u)^5\sigma_\sharp(v)^5}=\begin{vmatrix}1 & x(u)\\1 & x(v)\end{vmatrix}^4 \tag{7.20}$$

が成り立つ.

7.4 The formula for $n=10$

ここでは第 10 階層について議論する.

命題 7.21. 次が成り立つ:

(7.22)

$$\frac{\sigma(u^{(1)}+u^{(2)}+\cdots+u^{(9)}+u^{(10)})\prod_{1\leqq i<j\leqq 10}\prod_{\nu=1}^{4}\sigma_\flat(u^{(i)}+[\zeta^\nu]u^{(j)})}{\prod_{j=1}^{10}\sigma_\sharp(u^{(j)})^{37}}$$

$$=\begin{vmatrix}
1 & x(u^{(1)}) & y(u^{(1)}) & x^2(u^{(1)}) & xy(u^{(1)}) & y^2(u^{(1)}) & x^3(u^{(1)}) & x^2y(u^{(1)}) & xy^2(u^{(1)}) & y^3(u^{(1)})\\
1 & x(u^{(2)}) & y(u^{(2)}) & x^2(u^{(2)}) & xy(u^{(2)}) & y^2(u^{(2)}) & x^3(u^{(2)}) & x^2y(u^{(2)}) & xy^2(u^{(2)}) & y^3(u^{(2)})\\
1 & x(u^{(3)}) & y(u^{(3)}) & x^2(u^{(3)}) & xy(u^{(3)}) & y^2(u^{(3)}) & x^3(u^{(3)}) & x^2y(u^{(3)}) & xy^2(u^{(3)}) & y^3(u^{(3)})\\
1 & x(u^{(4)}) & y(u^{(4)}) & x^2(u^{(4)}) & xy(u^{(4)}) & y^2(u^{(4)}) & x^3(u^{(4)}) & x^2y(u^{(4)}) & xy^2(u^{(4)}) & y^3(u^{(4)})\\
1 & x(u^{(5)}) & y(u^{(5)}) & x^2(u^{(5)}) & xy(u^{(5)}) & y^2(u^{(5)}) & x^3(u^{(5)}) & x^2y(u^{(5)}) & xy^2(u^{(5)}) & y^3(u^{(5)})\\
1 & x(u^{(6)}) & y(u^{(6)}) & x^2(u^{(6)}) & xy(u^{(6)}) & y^2(u^{(6)}) & x^3(u^{(6)}) & x^2y(u^{(6)}) & xy^2(u^{(6)}) & y^3(u^{(6)})\\
1 & x(u^{(7)}) & y(u^{(7)}) & x^2(u^{(7)}) & xy(u^{(7)}) & y^2(u^{(7)}) & x^3(u^{(7)}) & x^2y(u^{(7)}) & xy^2(u^{(7)}) & y^3(u^{(7)})\\
1 & x(u^{(8)}) & y(u^{(8)}) & x^2(u^{(8)}) & xy(u^{(8)}) & y^2(u^{(8)}) & x^3(u^{(8)}) & x^2y(u^{(8)}) & xy^2(u^{(8)}) & y^3(u^{(8)})\\
1 & x(u^{(9)}) & y(u^{(9)}) & x^2(u^{(9)}) & xy(u^{(9)}) & y^2(u^{(9)}) & x^3(u^{(9)}) & x^2y(u^{(9)}) & xy^2(u^{(9)}) & y^3(u^{(9)})\\
1 & x(u^{(10)}) & y(u^{(10)}) & x^2(u^{(10)}) & xy(u^{(10)}) & y^2(u^{(10)}) & x^3(u^{(10)}) & x^2y(u^{(10)}) & xy^2(u^{(10)}) & y^3(u^{(10)})
\end{vmatrix}$$

$$\cdot\begin{vmatrix}
1 & x(u^{(1)}) & x^2(u^{(1)}) & x^3(u^{(1)}) & x^4(u^{(1)}) & x^5(u^{(1)}) & x^6(u^{(1)}) & x^7(u^{(1)}) & x^8(u^{(1)}) & x^9(u^{(1)})\\
1 & x(u^{(2)}) & x^2(u^{(2)}) & x^3(u^{(2)}) & x^4(u^{(2)}) & x^5(u^{(2)}) & x^6(u^{(2)}) & x^7(u^{(2)}) & x^8(u^{(2)}) & x^9(u^{(2)})\\
1 & x(u^{(3)}) & x^2(u^{(3)}) & x^3(u^{(3)}) & x^4(u^{(3)}) & x^5(u^{(3)}) & x^6(u^{(3)}) & x^7(u^{(3)}) & x^8(u^{(3)}) & x^9(u^{(3)})\\
1 & x(u^{(4)}) & x^2(u^{(4)}) & x^3(u^{(4)}) & x^4(u^{(4)}) & x^5(u^{(4)}) & x^6(u^{(4)}) & x^7(u^{(4)}) & x^8(u^{(4)}) & x^9(u^{(4)})\\
1 & x(u^{(5)}) & x^2(u^{(5)}) & x^3(u^{(5)}) & x^4(u^{(5)}) & x^5(u^{(5)}) & x^6(u^{(5)}) & x^7(u^{(5)}) & x^8(u^{(5)}) & x^9(u^{(5)})\\
1 & x(u^{(6)}) & x^2(u^{(6)}) & x^3(u^{(6)}) & x^4(u^{(6)}) & x^5(u^{(6)}) & x^6(u^{(6)}) & x^7(u^{(6)}) & x^8(u^{(6)}) & x^9(u^{(6)})\\
1 & x(u^{(7)}) & x^2(u^{(7)}) & x^3(u^{(7)}) & x^4(u^{(7)}) & x^5(u^{(7)}) & x^6(u^{(7)}) & x^7(u^{(7)}) & x^8(u^{(7)}) & x^9(u^{(7)})\\
1 & x(u^{(8)}) & x^2(u^{(8)}) & x^3(u^{(8)}) & x^4(u^{(8)}) & x^5(u^{(8)}) & x^6(u^{(8)}) & x^7(u^{(8)}) & x^8(u^{(8)}) & x^9(u^{(8)})\\
1 & x(u^{(9)}) & x^2(u^{(9)}) & x^3(u^{(9)}) & x^4(u^{(9)}) & x^5(u^{(9)}) & x^6(u^{(9)}) & x^7(u^{(9)}) & x^8(u^{(9)}) & x^9(u^{(9)})\\
1 & x(u^{(10)}) & x^2(u^{(10)}) & x^3(u^{(10)}) & x^4(u^{(10)}) & x^5(u^{(10)}) & x^6(u^{(10)}) & x^7(u^{(10)}) & x^8(u^{(10)}) & x^9(u^{(10)})
\end{vmatrix}^3.$$

証明 まづ $u^{(10)}=v$ と書いて, 両辺を v の函数として考察する. 函数 $\mathbb{C}^g\ni u\mapsto\sigma(u)$ の基本的な性質 ([FK1], p.290 の Theorem, p.291 の Theorem, または [FK2], p.308 の Theorem, p.310 の Theorem) から左辺の零点のなす因子 (divisor) は $\mathrm{Pic}^0(C)$ の中でその単位元に線形同値である. しかし Schur-Weierstrass 多項式 $S(u)$ との関係から, この函数が恒等的に 0 といふことはない. このことと $v\in\kappa^{-1}\iota(C)$ の函数である左辺が完全に周期的 (translational relation による) であることから, Abel の定理 ([FK2], p.93, III.6.3, Theorem) により, 右辺は $x(u^{(j)})$, $y(u^{(j)})$ $(j=1,\cdots,9)$ および $x(v)$, $y(v)$ の有理式である. しかも 7.5 から左辺は, 極が Λ 上にしかないので, 実際は $x(u^{(j)})$, $y(u^{(j)})$ $(j=1,\cdots,9)$ および $x(v)$, $y(v)$ の多項式でなくてはならない. $v=(0,0,\cdots,0)$ における極の位数は 3.22, 7.5, 7.9 から

$$-(1+6\times9\times4-10\times37)=-153 \tag{7.23}$$

である. さらに, これは 0 でない定数倍を除いて主張の等式の右辺と一致する. 実際主張の左辺は v の函数として, 極の位数が $-5\times9\times3-6\times3=-153$ で右辺と

一致する. 右辺は v の函数として, 各 $v=u^{(i)}$ で 4 位の零点, $v=[\zeta^j]u^{(i)}$ ($j=1$, $\cdots$, 4) で 3 位の零点, 計 $4\times 9+3\times 9\times 4=144$ 個の零点を持つ. これは左辺の分子の後の $\sigma_\flat$ の積の部分と全く同じ零点である. 右辺の残りの $153-144=9$ 個の零点を $\alpha^{(k)}$ ($k=1,\cdots,9$) と書くことにする. 左辺も各 $v=\beta^{(k)}$ に 1 位の零点を持つことが以下のやうにして示される. まづ Abel の定理により

$$
\begin{aligned}
&\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}+\cdots+\alpha^{(9)}\\
&\quad+4u^{(1)}+3([\zeta]u^{(1)}+[\zeta^2]u^{(1)}+[\zeta^3]u^{(1)}+[\zeta^4]u^{(1)})\\
&\qquad+4u^{(2)}+3([\zeta]u^{(2)}+[\zeta^2]u^{(2)}+[\zeta^3]u^{(2)}+[\zeta^4]u^{(2)})\\
&\qquad\quad+\ \ \cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad+4u^{(9)}+3([\zeta]u^{(9)}+[\zeta^2]u^{(9)}+[\zeta^3]u^{(9)}+[\zeta^4]u^{(9)})\in\Lambda,
\end{aligned}\tag{7.24}
$$

ここで $1+\zeta+\zeta^2+\zeta^3+\zeta^4=0$ を使へば

$$\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}+\cdots+\alpha^{(9)}+u^{(1)}+u^{(2)}+\cdots+u^{(9)}\in\Lambda\tag{7.25}$$

を得る. よつて

$$\sigma(u^{(1)}+u^{(2)}+\cdots+u^{(9)}+v)\tag{7.26}$$

は

$$\sigma(v-\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)}-\cdots-\alpha^{(9)})\tag{7.27}$$

と同一の零点を持つ. これは補題 3.22 (3) により $v=(0,0,\cdots,0)$, $\alpha^{(1)}$, $\cdots$, $\alpha^{(9)}$ なる 10 個の点で零を持つ. それゆゑ, 命題 7.9 の証明におけるのと同様に偏角の原理によつて, これら 10 個はすべて 1 位の零点でなければならない. 従つて主張の左辺は, 右辺と v に関係しない適当な函数 $a(u^{(1)},u^{(2)},\cdots,u^{(9)})$ との積に等しい. 然るに, 左辺を各 $u^{(j)}$ の函数と見たとき, それは $u=(0,0,\cdots,0)$ modulo Λ にしか極をもたないが, 左辺の極の位数 -153 をすでに得てゐるので $a(u^{(1)},u^{(2)},\cdots,u^{(9)})$ は実は $u^{(i)}$ 達に依らない定数 a であることがわかる. 以上の関係式は任意の λ_j について定義されなくてはならないから $a(u^{(1)},u^{(2)},\cdots,u^{(9)})$ は λ_j 達にも依らないことがわかる. ちなみに, この時点で両辺の Sato weight も一致してゐる. さて, ここで両辺の冪級数展開を調べて a が 1 であることもわかるのであるが, それをこの段階で示すのは大変なので, これを次の様にて済ませる. いまこの a が未確定だとして, この後, 第 7.5 節から 第 7.11 節までを辿り, 最後に 7.75 から, そこまで用いた方法でもつて 7.11 が導かれることを確認せよ. さうすれば, これが $a=1$ を示してゐる. □

系 7.28. 函数 $v \mapsto \sigma(u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}+u^{(4)}+u^{(5)}+u^{(6)}+u^{(7)}+u^{(8)}+u^{(9)}+v)$ は原点 $(0,0,\cdots,0)$ modulo Λ および函数

(7.29)

$$v \longmapsto \begin{vmatrix} 1 & x(u^{(1)}) & y(u^{(1)}) & x^2(u^{(1)}) & xy(u^{(1)}) & y^2(u^{(1)}) & x^3(u^{(1)}) & x^2y(u^{(1)}) & xy^2(u^{(1)}) & y^3(u^{(1)}) \\ 1 & x(u^{(2)}) & y(u^{(2)}) & x^2(u^{(2)}) & xy(u^{(2)}) & y^2(u^{(2)}) & x^3(u^{(2)}) & x^2y(u^{(2)}) & xy^2(u^{(2)}) & y^3(u^{(2)}) \\ 1 & x(u^{(3)}) & y(u^{(3)}) & x^2(u^{(3)}) & xy(u^{(3)}) & y^2(u^{(3)}) & x^3(u^{(3)}) & x^2y(u^{(3)}) & xy^2(u^{(3)}) & y^3(u^{(3)}) \\ 1 & x(u^{(4)}) & y(u^{(4)}) & x^2(u^{(4)}) & xy(u^{(4)}) & y^2(u^{(4)}) & x^3(u^{(4)}) & x^2y(u^{(4)}) & xy^2(u^{(4)}) & y^3(u^{(4)}) \\ 1 & x(u^{(5)}) & y(u^{(5)}) & x^2(u^{(5)}) & xy(u^{(5)}) & y^2(u^{(5)}) & x^3(u^{(5)}) & x^2y(u^{(5)}) & xy^2(u^{(5)}) & y^3(u^{(5)}) \\ 1 & x(u^{(6)}) & y(u^{(6)}) & x^2(u^{(6)}) & xy(u^{(6)}) & y^2(u^{(6)}) & x^3(u^{(6)}) & x^2y(u^{(6)}) & xy^2(u^{(6)}) & y^3(u^{(6)}) \\ 1 & x(u^{(7)}) & y(u^{(7)}) & x^2(u^{(7)}) & xy(u^{(7)}) & y^2(u^{(7)}) & x^3(u^{(7)}) & x^2y(u^{(7)}) & xy^2(u^{(7)}) & y^3(u^{(7)}) \\ 1 & x(u^{(8)}) & y(u^{(8)}) & x^2(u^{(8)}) & xy(u^{(8)}) & y^2(u^{(8)}) & x^3(u^{(8)}) & x^2y(u^{(8)}) & xy^2(u^{(8)}) & y^3(u^{(8)}) \\ 1 & x(u^{(9)}) & y(u^{(9)}) & x^2(u^{(9)}) & xy(u^{(9)}) & y^2(u^{(9)}) & x^3(u^{(9)}) & x^2y(u^{(9)}) & xy^2(u^{(9)}) & y^3(u^{(9)}) \\ 1 & x(v) & y(v) & x^2(v) & xy(v) & y^2(v) & x^3(v) & x^2y(v) & xy^2(v) & y^3(v) \end{vmatrix}$$

の非自明な零点, つまり $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, $u^{(4)}$, $u^{(5)}$, $u^{(6)}$, $u^{(7)}$, $u^{(8)}$, $u^{(9)}$ modulo Λ 以外の 9 つの零点 modulo Λ でそれぞれ 1 位の零を持つが, それ以外の点では消えない.

7.5 The formula for $n = 9$

ここでは第 9 階層について議論する.

命題 7.30. 次が成り立つ:

(7.31)

$$\frac{\sigma_{\natural^9}(u^{(1)}+u^{(2)}+\cdots+u^{(9)})\prod_{1\leqq i<j\leqq 9}\prod_{\nu=1}^{4}\sigma_\flat(u^{(i)}+[\zeta^\nu]u^{(j)})}{\prod_{j=1}^{9}\sigma_\sharp(u^{(j)})^{33}}$$

$$=\begin{vmatrix}
1 & x(u^{(1)}) & y(u^{(1)}) & x^2(u^{(1)}) & xy(u^{(1)}) & y^2(u^{(1)}) & x^3(u^{(1)}) & x^2y(u^{(1)}) & xy^2(u^{(1)})\\
1 & x(u^{(2)}) & y(u^{(2)}) & x^2(u^{(2)}) & xy(u^{(2)}) & y^2(u^{(2)}) & x^3(u^{(2)}) & x^2y(u^{(2)}) & xy^2(u^{(2)})\\
1 & x(u^{(3)}) & y(u^{(3)}) & x^2(u^{(3)}) & xy(u^{(3)}) & y^2(u^{(3)}) & x^3(u^{(3)}) & x^2y(u^{(3)}) & xy^2(u^{(3)})\\
1 & x(u^{(4)}) & y(u^{(4)}) & x^2(u^{(4)}) & xy(u^{(4)}) & y^2(u^{(4)}) & x^3(u^{(4)}) & x^2y(u^{(4)}) & xy^2(u^{(4)})\\
1 & x(u^{(5)}) & y(u^{(5)}) & x^2(u^{(5)}) & xy(u^{(5)}) & y^2(u^{(5)}) & x^3(u^{(5)}) & x^2y(u^{(5)}) & xy^2(u^{(5)})\\
1 & x(u^{(6)}) & y(u^{(6)}) & x^2(u^{(6)}) & xy(u^{(6)}) & y^2(u^{(6)}) & x^3(u^{(6)}) & x^2y(u^{(6)}) & xy^2(u^{(6)})\\
1 & x(u^{(7)}) & y(u^{(7)}) & x^2(u^{(7)}) & xy(u^{(7)}) & y^2(u^{(7)}) & x^3(u^{(7)}) & x^2y(u^{(7)}) & xy^2(u^{(7)})\\
1 & x(u^{(8)}) & y(u^{(8)}) & x^2(u^{(8)}) & xy(u^{(8)}) & y^2(u^{(8)}) & x^3(u^{(8)}) & x^2y(u^{(8)}) & xy^2(u^{(8)})\\
1 & x(u^{(9)}) & y(u^{(9)}) & x^2(u^{(9)}) & xy(u^{(9)}) & y^2(u^{(9)}) & x^3(u^{(9)}) & x^2y(u^{(9)}) & xy^2(u^{(9)})
\end{vmatrix}$$

$$\cdot\begin{vmatrix}
1 & x(u^{(1)}) & x^2(u^{(1)}) & x^3(u^{(1)}) & x^4(u^{(1)}) & x^5(u^{(1)}) & x^6(u^{(1)}) & x^7(u^{(1)}) & x^8(u^{(1)})\\
1 & x(u^{(2)}) & x^2(u^{(2)}) & x^3(u^{(2)}) & x^4(u^{(2)}) & x^5(u^{(2)}) & x^6(u^{(2)}) & x^7(u^{(2)}) & x^8(u^{(2)})\\
1 & x(u^{(3)}) & x^2(u^{(3)}) & x^3(u^{(3)}) & x^4(u^{(3)}) & x^5(u^{(3)}) & x^6(u^{(3)}) & x^7(u^{(3)}) & x^8(u^{(3)})\\
1 & x(u^{(4)}) & x^2(u^{(4)}) & x^3(u^{(4)}) & x^4(u^{(4)}) & x^5(u^{(4)}) & x^6(u^{(4)}) & x^7(u^{(4)}) & x^8(u^{(4)})\\
1 & x(u^{(5)}) & x^2(u^{(5)}) & x^3(u^{(5)}) & x^4(u^{(5)}) & x^5(u^{(5)}) & x^6(u^{(5)}) & x^7(u^{(5)}) & x^8(u^{(5)})\\
1 & x(u^{(6)}) & x^2(u^{(6)}) & x^3(u^{(6)}) & x^4(u^{(6)}) & x^5(u^{(6)}) & x^6(u^{(6)}) & x^7(u^{(6)}) & x^8(u^{(6)})\\
1 & x(u^{(7)}) & x^2(u^{(7)}) & x^3(u^{(7)}) & x^4(u^{(7)}) & x^5(u^{(7)}) & x^6(u^{(7)}) & x^7(u^{(7)}) & x^8(u^{(7)})\\
1 & x(u^{(8)}) & x^2(u^{(8)}) & x^3(u^{(8)}) & x^4(u^{(8)}) & x^5(u^{(8)}) & x^6(u^{(8)}) & x^7(u^{(8)}) & x^8(u^{(8)})\\
1 & x(u^{(9)}) & x^2(u^{(9)}) & x^3(u^{(9)}) & x^4(u^{(9)}) & x^5(u^{(9)}) & x^6(u^{(9)}) & x^7(u^{(9)}) & x^8(u^{(9)})
\end{vmatrix}^3.$$

証明 以下ではいくつかの $u^{(1)}, \cdots, u^{(j)} \in \kappa^{-1}(\Theta^{[1]})$ に対し,

$$u^{[j]} = u^{(1)} + \cdots + u^{(j)} \tag{7.32}$$

と表はすことにする. 補題 3.22 により $\sigma(u)$ は $\Theta^{[9]}$ で消えるので, 7.28 の式を $v_{\langle 1\rangle}$ で展開すれば,

$$\sigma(u^{[9]}+v) = \sigma_{\langle 1\rangle}(u^{[9]})v_{\langle 1\rangle} + \cdots \tag{7.33}$$

となる. 7.21 で $u^{(10)} = v$ として, その右辺を $v_{\langle 1\rangle}$ で展開したものは, 2.17 により主張の右辺に一致する. 以上のことと 7.5, 7.9 を合はせれば証明が完成する. □

系 7.34. 函数 $v \mapsto \sigma_{\natural^9}(u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + u^{(4)} + u^{(5)} + u^{(6)} + u^{(7)} + u^{(8)} + v)$ は原点 $(0, 0, \cdots, 0)$ modulo Λ および函数
(7.35)

$$v \longmapsto \begin{vmatrix} 1 & x(u^{(1)}) & y(u^{(1)}) & x^2(u^{(1)}) & xy(u^{(1)}) & y^2(u^{(1)}) & x^3(u^{(1)}) & x^2y(u^{(1)}) & xy^2(u^{(1)}) \\ 1 & x(u^{(2)}) & y(u^{(2)}) & x^2(u^{(2)}) & xy(u^{(2)}) & y^2(u^{(2)}) & x^3(u^{(2)}) & x^2y(u^{(2)}) & xy^2(u^{(2)}) \\ 1 & x(u^{(3)}) & y(u^{(3)}) & x^2(u^{(3)}) & xy(u^{(3)}) & y^2(u^{(3)}) & x^3(u^{(3)}) & x^2y(u^{(3)}) & xy^2(u^{(3)}) \\ 1 & x(u^{(4)}) & y(u^{(4)}) & x^2(u^{(4)}) & xy(u^{(4)}) & y^2(u^{(4)}) & x^3(u^{(4)}) & x^2y(u^{(4)}) & xy^2(u^{(4)}) \\ 1 & x(u^{(5)}) & y(u^{(5)}) & x^2(u^{(5)}) & xy(u^{(5)}) & y^2(u^{(5)}) & x^3(u^{(5)}) & x^2y(u^{(5)}) & xy^2(u^{(5)}) \\ 1 & x(u^{(6)}) & y(u^{(6)}) & x^2(u^{(6)}) & xy(u^{(6)}) & y^2(u^{(6)}) & x^3(u^{(6)}) & x^2y(u^{(6)}) & xy^2(u^{(6)}) \\ 1 & x(u^{(7)}) & y(u^{(7)}) & x^2(u^{(7)}) & xy(u^{(7)}) & y^2(u^{(7)}) & x^3(u^{(7)}) & x^2y(u^{(7)}) & xy^2(u^{(7)}) \\ 1 & x(u^{(8)}) & y(u^{(8)}) & x^2(u^{(8)}) & xy(u^{(8)}) & y^2(u^{(8)}) & x^3(u^{(8)}) & x^2y(u^{(8)}) & xy^2(u^{(8)}) \\ 1 & x(v) & y(v) & x^2(v) & xy(v) & y^2(v) & x^3(v) & x^2y(v) & xy^2(v) \end{vmatrix}$$

の非自明な零点, つまり $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, $u^{(4)}$, $u^{(5)}$, $u^{(6)}$, $u^{(7)}$, $u^{(8)}$ modulo Λ 以外の 9 つの零点 modulo Λ でそれぞれ 1 位の零を持つが, それ以外の点では消えない.

7.6 The formula for $n=8$

ここでは第 8 階層について議論する.

命題 7.36. 次が成り立つ:

(7.37)

$$\frac{\sigma_{\natural^8}(u^{(1)}+u^{(2)}+\cdots+u^{(8)})\prod_{1\leqq i<j\leqq 8}\prod_{\nu=1}^{4}\sigma_\flat(u^{(i)}+[\zeta^\nu]u^{(j)})}{\prod_{j=1}^{8}\sigma_\sharp(u^{(j)})^{29}}$$

$$=-\begin{vmatrix}
1 & x(u^{(1)}) & y(u^{(1)}) & x^2(u^{(1)}) & xy(u^{(1)}) & y^2(u^{(1)}) & x^3(u^{(1)}) & x^2y(u^{(1)}) \\
1 & x(u^{(2)}) & y(u^{(2)}) & x^2(u^{(2)}) & xy(u^{(2)}) & y^2(u^{(2)}) & x^3(u^{(2)}) & x^2y(u^{(2)}) \\
1 & x(u^{(3)}) & y(u^{(3)}) & x^2(u^{(3)}) & xy(u^{(3)}) & y^2(u^{(3)}) & x^3(u^{(3)}) & x^2y(u^{(3)}) \\
1 & x(u^{(4)}) & y(u^{(4)}) & x^2(u^{(4)}) & xy(u^{(4)}) & y^2(u^{(4)}) & x^3(u^{(4)}) & x^2y(u^{(4)}) \\
1 & x(u^{(5)}) & y(u^{(5)}) & x^2(u^{(5)}) & xy(u^{(5)}) & y^2(u^{(5)}) & x^3(u^{(5)}) & x^2y(u^{(5)}) \\
1 & x(u^{(6)}) & y(u^{(6)}) & x^2(u^{(6)}) & xy(u^{(6)}) & y^2(u^{(6)}) & x^3(u^{(6)}) & x^2y(u^{(6)}) \\
1 & x(u^{(7)}) & y(u^{(7)}) & x^2(u^{(7)}) & xy(u^{(7)}) & y^2(u^{(7)}) & x^3(u^{(7)}) & x^2y(u^{(7)}) \\
1 & x(u^{(8)}) & y(u^{(8)}) & x^2(u^{(8)}) & xy(u^{(8)}) & y^2(u^{(8)}) & x^3(u^{(8)}) & x^2y(u^{(8)})
\end{vmatrix}$$

$$\cdot\begin{vmatrix}
1 & x(u^{(1)}) & x^2(u^{(1)}) & x^3(u^{(1)}) & x^4(u^{(1)}) & x^5(u^{(1)}) & x^6(u^{(1)}) & x^7(u^{(1)}) \\
1 & x(u^{(2)}) & x^2(u^{(2)}) & x^3(u^{(2)}) & x^4(u^{(2)}) & x^5(u^{(2)}) & x^6(u^{(2)}) & x^7(u^{(2)}) \\
1 & x(u^{(3)}) & x^2(u^{(3)}) & x^3(u^{(3)}) & x^4(u^{(3)}) & x^5(u^{(3)}) & x^6(u^{(3)}) & x^7(u^{(3)}) \\
1 & x(u^{(4)}) & x^2(u^{(4)}) & x^3(u^{(4)}) & x^4(u^{(4)}) & x^5(u^{(4)}) & x^6(u^{(4)}) & x^7(u^{(4)}) \\
1 & x(u^{(5)}) & x^2(u^{(5)}) & x^3(u^{(5)}) & x^4(u^{(5)}) & x^5(u^{(5)}) & x^6(u^{(5)}) & x^7(u^{(5)}) \\
1 & x(u^{(6)}) & x^2(u^{(6)}) & x^3(u^{(6)}) & x^4(u^{(6)}) & x^5(u^{(6)}) & x^6(u^{(6)}) & x^7(u^{(6)}) \\
1 & x(u^{(7)}) & x^2(u^{(7)}) & x^3(u^{(7)}) & x^4(u^{(7)}) & x^5(u^{(7)}) & x^6(u^{(7)}) & x^7(u^{(7)}) \\
1 & x(u^{(8)}) & x^2(u^{(8)}) & x^3(u^{(8)}) & x^4(u^{(8)}) & x^5(u^{(8)}) & x^6(u^{(8)}) & x^7(u^{(8)})
\end{vmatrix}^3.$$

証明 ここでも (7.32) の記法を使ふ. 先の命題の $u^{(9)}$ を単に $v=(v_{\langle 19\rangle},v_{\langle 14\rangle},\cdots,v_{\langle 1\rangle})$ と書く. 系 7.34 の $\sigma_{\natural^9}(u^{[8]})=\sigma_{\langle 1\rangle}(u^{[8]})=0$ に注意して, 7.30 の式の両辺を $v_{\langle 1\rangle}$ で展開する. その時に

$$\sigma_{\langle 1\rangle}(u^{[8]}+v)=\sigma_{\langle 11\rangle}(u^{[8]})v_{\langle 1\rangle}+\cdots \tag{7.38}$$

に注意する. また $\sigma(u^{[8]}+v)$ を $v_{\langle 2\rangle}=\frac{1}{2}{v_{\langle 1\rangle}}^2+\cdots$ などに注意して $v_{\langle 1\rangle}$ に関して展開すれば

$$\begin{aligned}\sigma(u^{[8]}+v)=\sigma_{\langle 1\rangle}(u^{[8]})&+\tfrac{1}{2!}\,\sigma_{\langle 11\rangle}(u^{[8]}){v_{\langle 1\rangle}}^2\\ &+\tfrac{1}{1!}\,\sigma_{\langle 2\rangle}(u^{[8]})\big(\tfrac{1}{2}{v_{\langle 1\rangle}}^2+\cdots\big)+\cdots\end{aligned} \tag{7.39}$$

となるが $\sigma(u^{[8]}+v)$ は恒等的に 0 なので, この 2 次の項の係数を見れば

$$\tfrac{1}{2!}\,\sigma_{\langle 11\rangle}(u^{[8]})=-\tfrac{1}{2}\,\sigma_{\langle 2\rangle}(u^{[8]}) \tag{7.40}$$

が得られる. (7.38) と (7.40) に注意すれば

$$\sigma_{\langle 1\rangle}(u^{[8]}+v)=-\sigma_{\langle 2\rangle}(u^{[8]})v_{\langle 1\rangle}+\big(d^\circ(v_{\langle 1\rangle})\geqq 2\big) \tag{7.41}$$

を得る. □

系 7.42. 函数 $v \mapsto \sigma_{\natural^8}(u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + u^{(4)} + u^{(5)} + u^{(6)} + u^{(7)} + v)$ は原点 $(0, 0, \cdots, 0)$ modulo Λ および函数

(7.43)

$$v \quad \longmapsto \quad \begin{vmatrix} 1 & x(u^{(1)}) & y(u^{(1)}) & x^2(u^{(1)}) & xy(u^{(1)}) & y^2(u^{(1)}) & x^3(u^{(1)}) & x^2y(u^{(1)}) \\ 1 & x(u^{(2)}) & y(u^{(2)}) & x^2(u^{(2)}) & xy(u^{(2)}) & y^2(u^{(2)}) & x^3(u^{(2)}) & x^2y(u^{(2)}) \\ 1 & x(u^{(3)}) & y(u^{(3)}) & x^2(u^{(3)}) & xy(u^{(3)}) & y^2(u^{(3)}) & x^3(u^{(3)}) & x^2y(u^{(3)}) \\ 1 & x(u^{(4)}) & y(u^{(4)}) & x^2(u^{(4)}) & xy(u^{(4)}) & y^2(u^{(4)}) & x^3(u^{(4)}) & x^2y(u^{(4)}) \\ 1 & x(u^{(5)}) & y(u^{(5)}) & x^2(u^{(5)}) & xy(u^{(5)}) & y^2(u^{(5)}) & x^3(u^{(5)}) & x^2y(u^{(5)}) \\ 1 & x(u^{(6)}) & y(u^{(6)}) & x^2(u^{(6)}) & xy(u^{(6)}) & y^2(u^{(6)}) & x^3(u^{(6)}) & x^2y(u^{(6)}) \\ 1 & x(u^{(7)}) & y(u^{(7)}) & x^2(u^{(7)}) & xy(u^{(7)}) & y^2(u^{(7)}) & x^3(u^{(7)}) & x^2y(u^{(7)}) \\ 1 & x(v) & y(v) & x^2(v) & xy(v) & y^2(v) & x^3(v) & x^2y(v) \end{vmatrix}$$

の非自明な零点, つまり $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, $u^{(4)}$, $u^{(5)}$, $u^{(6)}$, $u^{(7)}$ modulo Λ 以外の 9 つの零点 modulo Λ でそれぞれ 1 位の零を持つが, それ以外の点では消えない.

7.7 The formula for $n=7$

ここでは第 7 階層について議論する.

命題 7.44. 次が成り立つ:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sigma_{\natural^7}(u^{(1)}+u^{(2)}+\cdots+u^{(7)})\prod_{1\leqq i<j\leqq 7}\prod_{\nu=1}^{4}\sigma_\flat(u^{(i)}+[\zeta^\nu]u^{(j)})}{\prod_{j=1}^{7}\sigma_\sharp(u^{(j)})^{25}}\\
&=\begin{vmatrix}
1 & x(u^{(1)}) & y(u^{(1)}) & x^2(u^{(1)}) & xy(u^{(1)}) & y^2(u^{(1)}) & x^3(u^{(1)})\\
1 & x(u^{(2)}) & y(u^{(2)}) & x^2(u^{(2)}) & xy(u^{(2)}) & y^2(u^{(2)}) & x^3(u^{(2)})\\
1 & x(u^{(3)}) & y(u^{(3)}) & x^2(u^{(3)}) & xy(u^{(3)}) & y^2(u^{(3)}) & x^3(u^{(3)})\\
1 & x(u^{(4)}) & y(u^{(4)}) & x^2(u^{(4)}) & xy(u^{(4)}) & y^2(u^{(4)}) & x^3(u^{(4)})\\
1 & x(u^{(5)}) & y(u^{(5)}) & x^2(u^{(5)}) & xy(u^{(5)}) & y^2(u^{(5)}) & x^3(u^{(5)})\\
1 & x(u^{(6)}) & y(u^{(6)}) & x^2(u^{(6)}) & xy(u^{(6)}) & y^2(u^{(6)}) & x^3(u^{(6)})\\
1 & x(u^{(7)}) & y(u^{(7)}) & x^2(u^{(7)}) & xy(u^{(7)}) & y^2(u^{(7)}) & x^3(u^{(7)})
\end{vmatrix}\\
&\times\begin{vmatrix}
1 & x(u^{(1)}) & x^2(u^{(1)}) & x^3(u^{(1)}) & x^4(u^{(1)}) & x^5(u^{(1)}) & x^6(u^{(1)})\\
1 & x(u^{(2)}) & x^2(u^{(2)}) & x^3(u^{(2)}) & x^4(u^{(2)}) & x^5(u^{(2)}) & x^6(u^{(2)})\\
1 & x(u^{(3)}) & x^2(u^{(3)}) & x^3(u^{(3)}) & x^4(u^{(3)}) & x^5(u^{(3)}) & x^6(u^{(3)})\\
1 & x(u^{(4)}) & x^2(u^{(4)}) & x^3(u^{(4)}) & x^4(u^{(4)}) & x^5(u^{(4)}) & x^6(u^{(4)})\\
1 & x(u^{(5)}) & x^2(u^{(5)}) & x^3(u^{(5)}) & x^4(u^{(5)}) & x^5(u^{(5)}) & x^6(u^{(5)})\\
1 & x(u^{(6)}) & x^2(u^{(6)}) & x^3(u^{(6)}) & x^4(u^{(6)}) & x^5(u^{(6)}) & x^6(u^{(6)})\\
1 & x(u^{(7)}) & x^2(u^{(7)}) & x^3(u^{(7)}) & x^4(u^{(7)}) & x^5(u^{(7)}) & x^6(u^{(7)})
\end{vmatrix}^3.
\end{aligned}
\tag{7.45}
$$

証明 以下においても (7.32) の記法を使ふ. 先の命題の $u^{(9)}$ を単に $v=(v_{\langle 19\rangle},v_{\langle 14\rangle},\cdots,v_{\langle 1\rangle})$ と書く. 表 9.2 から $\sigma_{\langle 1\rangle}(u^{[8]})=0$ であり, これと表 9.4 に注意して, 7.36 の式の両辺を

$$
\begin{aligned}
&\big(\sigma_{\langle 11\rangle}(u^{[7]}+v)=\sigma_{\langle 111\rangle}(u^{[7]})v_{\langle 1\rangle}+\cdots,\big)\\
&\sigma_{\natural^8}(u^{[7]}+v)=\sigma_{\langle 2\rangle}(u^{[7]}+v)=\sigma_{\langle 21\rangle}(u^{[7]})v_{\langle 1\rangle}+\cdots
\end{aligned}
\tag{7.46}
$$

に注意して $v_{\langle 1\rangle}$ で展開する. また $\sigma(u^{[7]}+v)$ を $u_{\langle 2\rangle}=\frac{1}{2}{v_{\langle 1\rangle}}^2+\cdots$ などに注意して $v_{\langle 1\rangle}$ に関して展開すれば

$$
\begin{aligned}
\sigma(u^{[7]}+v)&=\sigma_{\langle 1\rangle}(u^{[7]})v_{\langle 1\rangle}\\
&\quad+\tfrac{1}{2!}\,\sigma_{\langle 11\rangle}(u^{[7]}){v_{\langle 1\rangle}}^2+\tfrac{1}{1!}\,\sigma_{\langle 2\rangle}(u^{[7]}+v)\big(\tfrac{1}{2}{v_{\langle 1\rangle}}^2+\cdots\big)\\
&\quad+\tfrac{1}{3!}\sigma_{\langle 111\rangle}(u^{[7]}){v_{\langle 1\rangle}}^3+\sigma_{\langle 21\rangle}(u^{[7]})\tfrac{1}{2}{v_{\langle 1\rangle}}^3+\sigma_{\langle 3\rangle}(u^{[7]})\tfrac{1}{3}{v_{\langle 1\rangle}}^3+\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{7.47}
$$

となるが 3.22 (3) により $\sigma(u^{[7]}+u)$ は恒等的に 0 なので, この 3 次の項の係数を見れば

$$
\tfrac{1}{3!}\,\sigma_{\langle 111\rangle}(u^{[7]})+\tfrac{1}{2}\,\sigma_{\langle 21\rangle}(u^{[7]})+\tfrac{1}{3}\,\sigma_{\langle 3\rangle}(u^{[7]})=0
\tag{7.48}
$$

が得られる. さらに $\sigma_{\langle 1\rangle}(u^{[7]}+v)$ を $v_{\langle 2\rangle}=\frac{1}{2}{v_{\langle 1\rangle}}^2+\cdots$ などに注意して $v_{\langle 1\rangle}$ に関して展開すれば

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\langle 1\rangle}(u^{[7]}+u)&=\sigma_{\langle 11\rangle}(u^{[7]})v_{\langle 1\rangle}+\tfrac{1}{2!}\,\sigma_{\langle 111\rangle}(u^{[7]}){v_{\langle 1\rangle}}^2\\
&\quad+\tfrac{1}{2!}\,\sigma_{\langle 21\rangle}(u^{[7]})\big(\tfrac{1}{2}{v_{\langle 1\rangle}}^2+\cdots\big)+\cdots
\end{aligned}
\tag{7.49}
$$

となるが 7.34 から $\sigma_{\langle 1\rangle}(u^{[7]}+u)$ は恒等的に 0 なので, この 2 次の項の係数を見れば

$$\tfrac{1}{2!}\,\sigma_{\langle 111\rangle}(u^{[7]})+\tfrac{1}{2!}\,\sigma_{\langle 21\rangle}(u^{[7]})=0 \tag{7.50}$$

が得られる. (7.48) と (7.50) から

$$\sigma_{\langle 111\rangle}(u^{[7]})=\sigma_{\langle 21\rangle}(u^{[7]})=\ \sigma_{\langle 3\rangle}(u^{[7]}) \tag{7.51}$$

を得る. ゆゑに

$$\sigma_{\natural^8}(u^{[7]}+v)=\sigma_{\natural^7}(u^{[7]})v_{\langle 1\rangle}+\cdots \tag{7.52}$$

となる. 以上を表にまとめると表 9.5 の様になる. この結果と 7.5 および 7.9 を合はせれば主張が証明される. □

系 7.53. 函数 $v\mapsto\sigma_{\natural^7}(u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}+u^{(4)}+u^{(5)}+u^{(6)}+v)$ は原点 $(0,0,\cdots,0)$ modulo Λ に 1 位の零点および函数

$$v \quad\longmapsto \begin{vmatrix}
1 & x(u^{(1)}) & y(u^{(1)}) & x^2(u^{(1)}) & xy(u^{(1)}) & y^2(u^{(1)}) & x^3(u^{(1)})\\
1 & x(u^{(2)}) & y(u^{(2)}) & x^2(u^{(2)}) & xy(u^{(2)}) & y^2(u^{(2)}) & x^3(u^{(2)})\\
1 & x(u^{(3)}) & y(u^{(3)}) & x^2(u^{(3)}) & xy(u^{(3)}) & y^2(u^{(3)}) & x^3(u^{(3)})\\
1 & x(u^{(4)}) & y(u^{(4)}) & x^2(u^{(4)}) & xy(u^{(4)}) & y^2(u^{(4)}) & x^3(u^{(4)})\\
1 & x(u^{(5)}) & y(u^{(5)}) & x^2(u^{(5)}) & xy(u^{(5)}) & y^2(u^{(5)}) & x^3(u^{(5)})\\
1 & x(u^{(6)}) & y(u^{(6)}) & x^2(u^{(6)}) & xy(u^{(6)}) & y^2(u^{(6)}) & x^3(u^{(6)})\\
1 & x(v) & y(v) & x^2(v) & xy(v) & y^2(v) & x^3(v)
\end{vmatrix} \tag{7.54}$$

の非自明な零点, つまり $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, $u^{(4)}$, $u^{(5)}$, $u^{(6)}$ modulo Λ 以外の 9 つの零点 modulo Λ でそれぞれ 1 位の零を持つが, それ以外の点では消えない.

7.8 The formula for $n = 6$

ここでは第 6 階層について議論する.

命題 7.55. 次が成り立つ:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sigma_{\natural^6}(u^{(1)}+u^{(2)}+\cdots+u^{(6)})\prod_{1\leqq i<j\leqq 6}\prod_{\nu=1}^{4}\sigma_\flat(u^{(i)}+[\zeta^\nu]u^{(j)})}{\prod_{j=1}^{6}\sigma_\sharp(u^{(j)})^{21}}\\
&= -\begin{vmatrix}
1 & x(u^{(1)}) & y(u^{(1)}) & x^2(u^{(1)}) & xy(u^{(1)}) & y^2(u^{(1)})\\
1 & x(u^{(2)}) & y(u^{(2)}) & x^2(u^{(2)}) & xy(u^{(2)}) & y^2(u^{(2)})\\
1 & x(u^{(3)}) & y(u^{(3)}) & x^2(u^{(3)}) & xy(u^{(3)}) & y^2(u^{(3)})\\
1 & x(u^{(4)}) & y(u^{(4)}) & x^2(u^{(4)}) & xy(u^{(4)}) & y^2(u^{(4)})\\
1 & x(u^{(5)}) & y(u^{(5)}) & x^2(u^{(5)}) & xy(u^{(5)}) & y^2(u^{(5)})\\
1 & x(u^{(6)}) & y(u^{(6)}) & x^2(u^{(6)}) & xy(u^{(6)}) & y^2(u^{(6)})
\end{vmatrix}\\
&\quad\times\begin{vmatrix}
1 & x(u^{(1)}) & x^2(u^{(1)}) & x^3(u^{(1)}) & x^4(u^{(1)}) & x^5(u^{(1)})\\
1 & x(u^{(2)}) & x^2(u^{(2)}) & x^3(u^{(2)}) & x^4(u^{(2)}) & x^5(u^{(2)})\\
1 & x(u^{(3)}) & x^2(u^{(3)}) & x^3(u^{(3)}) & x^4(u^{(3)}) & x^5(u^{(3)})\\
1 & x(u^{(4)}) & x^2(u^{(4)}) & x^3(u^{(4)}) & x^4(u^{(4)}) & x^5(u^{(4)})\\
1 & x(u^{(5)}) & x^2(u^{(5)}) & x^3(u^{(5)}) & x^4(u^{(5)}) & x^5(u^{(5)})\\
1 & x(u^{(6)}) & x^2(u^{(6)}) & x^3(u^{(6)}) & x^4(u^{(6)}) & x^5(u^{(6)})
\end{vmatrix}^3.
\end{aligned}
\tag{7.56}
$$

証明 引き続き (7.32) の記法を使ふ. 7.53 の式を $u^{(7)}_{\langle 1\rangle}$ で展開する. 以下, 見易くする為に $v = u^{(7)}$ とおき $v_{\langle 1\rangle} = u^{(7)}_{\langle 1\rangle}$ での展開を記す. 表 9.5 などにより Sato weight が 2 以下の多重添字に関する $\sigma(u)$ の偏導函数は $\Theta^{[6]}$ で消えるので,

$$
\sigma_{\langle 3\rangle}(u^{[6]}+v) = \sigma_{\langle 31\rangle}(u^{[6]})\tfrac{1}{3!}v_{\langle 1\rangle} + \cdots \tag{7.57}
$$

および表 9.7 による剥離法の結果により,

$$
-\sigma_{\langle 1111\rangle}(u^{[6]}) = \sigma_{\langle 211\rangle}(u^{[6]}) = -\sigma_{\langle 22\rangle}(u^{[6]}) = -\sigma_{\langle 31\rangle}(u^{[6]}) = \sigma_{\langle 4\rangle}(u^{[6]}) \tag{7.58}
$$

であることに注意すればよい. □

系 7.59. 函数 $v \mapsto \sigma_{\natural^6}(u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}+u^{(4)}+u^{(5)}+v)$ は原点 $(0,0,\cdots,0)$ modulo Λ に 3 位の零点および函数

$$
v \quad\longmapsto\quad \begin{vmatrix}
1 & x(u^{(1)}) & y(u^{(1)}) & x^2(u^{(1)}) & xy(u^{(1)}) & y^2(u^{(1)})\\
1 & x(u^{(2)}) & y(u^{(2)}) & x^2(u^{(2)}) & xy(u^{(2)}) & y^2(u^{(2)})\\
1 & x(u^{(3)}) & y(u^{(3)}) & x^2(u^{(3)}) & xy(u^{(3)}) & y^2(u^{(3)})\\
1 & x(u^{(4)}) & y(u^{(4)}) & x^2(u^{(4)}) & xy(u^{(4)}) & y^2(u^{(4)})\\
1 & x(u^{(5)}) & y(u^{(5)}) & x^2(u^{(5)}) & xy(u^{(5)}) & y^2(u^{(5)})\\
1 & x(v) & y(v) & x^2(v) & xy(v) & y^2(v)
\end{vmatrix} \tag{7.60}
$$

の非自明な零点, つまり $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, $u^{(4)}$, $u^{(5)}$ modulo Λ 以外の 7 つの零点 modulo Λ でそれぞれ 1 位の零を持つが, それ以外の点では消えない. 特に, この場合 5.11 が成り立つ.

7.9 The formula for $n=5$

ここでは第 5 階層について議論する.

命題 7.61. 次が成り立つ:
(7.62)

$$\frac{\sigma_{\natural^5}(u^{(1)}+u^{(2)}+\cdots+u^{(5)})\prod_{1\leqq i<j\leqq 5}\prod_{\nu=1}^{4}\sigma_{\flat}(u^{(i)}+[\zeta^{\nu}]u^{(j)})}{\prod_{j=1}^{5}\sigma_{\sharp}(u^{(j)})^{17}}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & x(u^{(1)}) & y(u^{(1)}) & x^2(u^{(1)}) & xy(u^{(1)})\\ 1 & x(u^{(2)}) & y(u^{(2)}) & x^2(u^{(2)}) & xy(u^{(2)})\\ 1 & x(u^{(3)}) & y(u^{(3)}) & x^2(u^{(3)}) & xy(u^{(3)})\\ 1 & x(u^{(4)}) & y(u^{(4)}) & x^2(u^{(4)}) & xy(u^{(4)})\\ 1 & x(u^{(5)}) & y(u^{(5)}) & x^2(u^{(5)}) & xy(u^{(5)})\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & x(u^{(1)}) & x^2(u^{(1)}) & x^3(u^{(1)}) & x^4(u^{(1)})\\ 1 & x(u^{(2)}) & x^2(u^{(2)}) & x^3(u^{(2)}) & x^4(u^{(2)})\\ 1 & x(u^{(3)}) & x^2(u^{(3)}) & x^3(u^{(3)}) & x^4(u^{(3)})\\ 1 & x(u^{(4)}) & x^2(u^{(4)}) & x^3(u^{(4)}) & x^4(u^{(4)})\\ 1 & x(u^{(5)}) & x^2(u^{(5)}) & x^3(u^{(5)}) & x^4(u^{(5)})\end{vmatrix}^3.$$

証明 引き続き (7.32) の記法を使ふ. 7.65 の式を $u^{(6)}_{\langle 1\rangle}$ で展開する. 以下, 見易くする為に $v=u^{(6)}$ とおき $v_{\langle 1\rangle}=u^{(6)}_{\langle 1\rangle}$ での展開を記す. 表 9.1 から 表 9.11 により, Sato weight が 5 以下の多重添字に関する $\sigma(u)$ の偏導函数は $\Theta^{[5]}$ で消えることがわかるので,

$$\begin{aligned}&\sigma_{\langle 4\rangle}(u^{[5]}+v)\\ &=\tfrac{1}{3!}\sigma_{\langle 4111\rangle}(u^{[5]})v_{\langle 1\rangle}{}^3+2\tfrac{1}{2!}\sigma_{\langle 421\rangle}(u^{[5]})v_{\langle 1\rangle}v^{(2)}+\sigma_{\langle 43\rangle}(u^{(5)})v_{\langle 3\rangle}+\cdots\\ &=\left(\tfrac{1}{6}\sigma_{\langle 4111\rangle}(u^{[5]})+2\tfrac{1}{2}\sigma_{\langle 421\rangle}(u^{[5]})+\tfrac{1}{3}\sigma_{\langle 43\rangle}(u^{(5)})v_{\langle 1\rangle}{}^3\right)+\cdots\end{aligned}\tag{7.63}$$

および 表 9.13 の示す剥離法からの結果

$$\sigma_{\langle 4111\rangle}(u^{[5]})=\sigma_{\langle 421\rangle}(u^{[5]})=\sigma_{\langle 43\rangle}(u^{[5]})=-\sigma_{\langle 7\rangle}(u^{[5]})\tag{7.64}$$

と 7.5 および 7.9 を使へば

$$\sigma_{\langle 4\rangle}(u^{[5]}+v)=-\sigma_{\langle 7\rangle}(u^{[5]})v_{\langle 1\rangle}{}^3+\big(d^{\circ}(v_{\langle 1\rangle})\geqq 4\big)\tag{7.65}$$

が得られる. □

系 7.66. 函数 $v\mapsto\sigma_{\natural^5}(u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}+u^{(4)}+v)$ は原点 $(0,0,\cdots,0)$ modulo Λ で 3 位の零点および函数

$$v\quad\longmapsto\quad\begin{vmatrix}1 & x(u^{(1)}) & y(u^{(1)}) & x^2(u^{(1)}) & xy(u^{(1)})\\ 1 & x(u^{(2)}) & y(u^{(2)}) & x^2(u^{(2)}) & xy(u^{(2)})\\ 1 & x(u^{(3)}) & y(u^{(3)}) & x^2(u^{(3)}) & xy(u^{(3)})\\ 1 & x(u^{(4)}) & y(u^{(4)}) & x^2(u^{(4)}) & xy(u^{(4)})\\ 1 & x(v) & y(v) & x^2(v) & xy(v)\end{vmatrix}\tag{7.67}$$

の非自明な零点, つまり $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, $u^{(4)}$ modulo Λ 以外の 7 つの零点 modulo Λ でそれぞれ 1 位の零を持つが, それ以外の点では消えない. 特に, この場合 5.11 が成り立つ.

7.10 The formula for $n=4$

ここでは第 4 階層について議論する.

命題 7.68. 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma_{\natural^4}(u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}+u^{(4)})\prod_{1\leqq i<j\leqq 4}\prod_{\nu=1}^{4}\sigma_\flat(u^{(i)}+[\zeta^\nu]u^{(j)})}{\prod_{j=1}^{4}\sigma_\sharp(u^{(j)})^{13}}\\ &=\begin{vmatrix}1 & x(u^{(1)}) & y(u^{(1)}) & x^2(u^{(1)})\\ 1 & x(u^{(2)}) & y(u^{(2)}) & x^2(u^{(2)})\\ 1 & x(u^{(3)}) & y(u^{(3)}) & x^2(u^{(3)})\\ 1 & x(u^{(4)}) & y(u^{(4)}) & x^2(u^{(4)})\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & x(u^{(1)}) & x^2(u^{(1)}) & x^3(u^{(1)})\\ 1 & x(u^{(2)}) & x^2(u^{(2)}) & x^3(u^{(2)})\\ 1 & x(u^{(3)}) & x^2(u^{(3)}) & x^3(u^{(3)})\\ 1 & x(u^{(4)}) & x^2(u^{(4)}) & x^3(u^{(4)})\end{vmatrix}^3.\end{aligned}\tag{7.69}$$

証明 引き続き (7.32) の記法を使ふ. 7.66 の式を $u^{(5)}_{\langle 1\rangle}$ で展開する. 以下, 見易くする為に $v=u^{(5)}$ とおき $v_{\langle 1\rangle}=u^{(5)}_{\langle 1\rangle}$ での展開を記す. 表 9.1 から表 9.14 などにより Sato weight が 9 以下の多重添字に関する $\sigma(u)$ の偏導函数は $\Theta^{[4]}$ で消えることがわかるので,

$$\begin{aligned}&\sigma_{\langle 7\rangle}(u^{[4]}+v)\\ &=\tfrac{1}{3!}\sigma_{\langle 7111\rangle}(u^{[4]}){v_{\langle 1\rangle}}^3+2\tfrac{1}{2!}\sigma_{\langle 721\rangle}(u^{[4]})v_{\langle 1\rangle}v_{\langle 2\rangle}+\sigma_{\langle 73\rangle}(u^{[4]})v_{\langle 3\rangle}+\cdots\\ &=\big(\tfrac{1}{6}\sigma_{\langle 7111\rangle}(u^{[4]})+\tfrac{1}{2}\sigma_{\langle 721\rangle}(u^{[4]})+\tfrac{1}{3}\sigma_{\langle 73\rangle}(u^{[4]})\big){v_{\langle 1\rangle}}^3+\cdots\end{aligned}\tag{7.70}$$

を得る. 表 9.15 からわかる

$$\sigma_{\langle 7111\rangle}(u^{[4]})=\sigma_{\langle 721\rangle}(u^{[4]})=\sigma_{\langle 73\rangle}(u^{[4]})=-\sigma_{\langle 82\rangle}(u^{[4]})\tag{7.71}$$

に注意すれば

$$\sigma_{\langle 7\rangle}(u^{[4]}+v)=-\sigma_{\langle 82\rangle}(u^{[4]}){v_{\langle 1\rangle}}^3+\big(d^\circ(v_{\langle 1\rangle})\geqq 4\big)\tag{7.72}$$

となることがわかる. □

系 7.73. 函数 $v\mapsto\sigma_{\natural^4}(u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}+v)$ は原点 $(0,0,\cdots,0)$ modulo Λ で 3 位の零点および函数

$$v\ \longmapsto\ \begin{vmatrix}1 & x(u^{(1)}) & y(u^{(1)}) & x^2(u^{(1)})\\ 1 & x(u^{(2)}) & y(u^{(2)}) & x^2(u^{(2)})\\ 1 & x(u^{(3)}) & y(u^{(3)}) & x^2(u^{(3)})\\ 1 & x(v) & y(v) & x^2(v)\end{vmatrix}\tag{7.74}$$

の非自明な零点, つまり $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$ modulo Λ 以外の 7 つの零点 modulo Λ でそれぞれ 1 位の零を持つが, それ以外の点では消えない. 特に, この場合 5.11 が成り立つ.

7.11 The formula for $n=3$

ここでは第 3 階層について議論する.

命題 7.75. 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma_{\natural^3}(u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)})\prod_{1\leqq i<j\leqq 3}\prod_{\nu=1}^{4}\sigma_\flat(u^{(i)}+[\zeta^\nu]u^{(j)})}{\prod_{j=1}^{3}\sigma_\sharp(u^{(j)})^9}\\
&=\begin{vmatrix}1 & x(u^{(1)}) & y(u^{(1)})\\ 1 & x(u^{(2)}) & y(u^{(2)})\\ 1 & x(u^{(3)}) & y(u^{(3)})\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & x(u^{(1)}) & x^2(u^{(1)})\\ 1 & x(u^{(2)}) & x^2(u^{(2)})\\ 1 & x(u^{(3)}) & x^2(u^{(3)})\end{vmatrix}^3.
\end{aligned}\tag{7.76}$$

証明 引き続き (7.32) の記法を使ふ. 7.73 の式を $u^{(4)}_{\langle 1\rangle}$ で展開する. 以下, 見易くする為に $v=u^{(4)}$ とおき $v_{\langle 1\rangle}=u^{(4)}_{\langle 1\rangle}$ での展開を記す. 表 9.5 から表 9.17 などにより Sato weight が 12 以下の多重添字に関する $\sigma(u)$ の偏導函数は $\Theta^{[3]}$ で消えることがわかるので,

$$\begin{aligned}
&\sigma_{\langle 82\rangle}(u^{[3]}+v)\\
&=\tfrac{1}{3!}\sigma_{\langle 82111\rangle}(u^{[3]}){v_{\langle 1\rangle}}^3+2\tfrac{1}{2!}\sigma_{\langle 8321\rangle}(u^{[3]})v_{\langle 1\rangle}v_{\langle 2\rangle}+\sigma_{\langle 833\rangle}(u^{[3]})v_{\langle 3\rangle}+\cdots\\
&=\big(\tfrac{1}{6}\sigma_{\langle 82111\rangle}(u^{[3]})+\tfrac{1}{2}\sigma_{\langle 8221\rangle}(u^{[3]})+\tfrac{1}{3}\sigma_{\langle 832\rangle}(u^{[3]})\big){v_{\langle 1\rangle}}^3+\big(d^\circ(v_{\langle 1\rangle})\geqq 4\big)
\end{aligned}\tag{7.77}$$

および, 表 9.18 からわかる

$$\sigma_{\langle 832\rangle}(u^{[3]})=\sigma_{\langle 8221\rangle}(u^{[3]})=\sigma_{\langle 82111\rangle}(u^{[3]})=\sigma_{\langle 931\rangle}(u^{[3]})\tag{7.78}$$

に注意すれば

$$\sigma_{\langle 82\rangle}(u^{[3]}+v)=\sigma_{\langle 931\rangle}(u^{[3]}){v_{\langle 1\rangle}}^3+\big(d^\circ(v_{\langle 1\rangle})\geqq 4\big)\tag{7.79}$$

を得る. □

系 7.80. 函数 $v\mapsto\sigma_{\natural^3}(u^{(1)}+u^{(2)}+v)$ は Λ の各点で 6 位の零点および函数

$$v\ \longmapsto\ \begin{vmatrix}1 & x(u^{(1)}) & y(u^{(1)})\\ 1 & x(u^{(2)}) & y(u^{(2)})\\ 1 & x(v) & y(v)\end{vmatrix}\tag{7.81}$$

の非自明な零点, つまり $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ modulo Λ 以外の 4 つの零点 modulo Λ でそれぞれ 1 位の零を持つが, それ以外の点では消えない. 特に, この場合 5.11 が成り立つ.

8 Kiepert-type formulae

命題 8.1. 次の等式が成り立つ:

$$\frac{\sigma_\flat(2u)}{\sigma_\sharp(u)^4} = 5y(u)^4. \tag{8.2}$$

証明 7.5 (4), 7.9, (7.13) から

$$\frac{\sigma_\flat(2u)}{\sigma_\sharp(u)^4} = \frac{5{u_{\langle 1\rangle}}^{16} + \cdots}{(u_{\langle 1\rangle}^{10} + \cdots)^4} = \frac{5}{{u_{\langle 1\rangle}}^{24}} + \cdots \tag{8.3}$$

となり, 7.5 (3) と 7.9 (3) によりこれは Λ に関する周期函数であつて, その極は Λ の点にのみ存在する. また 3.43 により

$$\sigma_\flat([\zeta]u) = \zeta^4\sigma_\flat(u), \quad \sigma_\sharp([\zeta]u) = \sigma_\sharp(u) \tag{8.4}$$

なので

$$\frac{\sigma_\flat(2[\zeta]u)}{\sigma_\sharp([\zeta]u)^4} = \zeta^4\frac{\sigma_\flat(2u)}{\sigma_\sharp(u)^4} \tag{8.5}$$

となる. 以上より主張する等式が成り立たねばならない. □

補題 8.6. 次が成り立つ:

$$\lim_{v\to u}\frac{\sigma_\flat(u+[\zeta]v)\,\sigma_\flat(u+[\zeta^2]v)\,\sigma_\flat(u+[\zeta^3]v)\,\sigma_\flat(u+[\zeta^4]v)}{\sigma_\sharp(u)^3\sigma_\sharp(v)^3(u_{\langle 1\rangle}-v_{\langle 1\rangle})^4} = 5^3. \tag{8.7}$$

証明 系 7.19 と 8.1 により

(8.8)

$$\begin{aligned}
&5y(u)^4\left(\lim_{v\to u}\frac{\sigma_\flat(u+[\zeta]v)\,\sigma_\flat(u+[\zeta^2]v)\,\sigma_\flat(u+[\zeta^3]v)\,\sigma_\flat(u+[\zeta^4]v)}{\sigma_\sharp(u)^3\sigma_\sharp(v)^3(u_{\langle 1\rangle}-v_{\langle 1\rangle})^4}\right)\\
&\quad=\lim_{v\to u}\frac{\sigma_\flat(u+v)\,\sigma_\flat(u+[\zeta]v)\,\sigma_\flat(u+[\zeta]^2]v)\,\sigma_\flat(u+[\zeta]^3]v)\,\sigma_\flat(u+[\zeta]^4]v)}{\sigma_\sharp(u)^5\sigma_\sharp(v)^5(u_{\langle 1\rangle}-v_{\langle 1\rangle})^4}\\
&\quad=\lim_{v\to u}\left(\frac{x(u)-x(v)}{u_{\langle 1\rangle}-v_{\langle 1\rangle}}\right)^4\\
&\quad=\lim_{v\to u}\left(\frac{dx}{du_{\langle 1\rangle}}(u)\right)^4\\
&\quad=\left(\frac{5y(u)^4}{y(u)^3}\right)^4\\
&\quad=5^4y(u)^4
\end{aligned}$$

なので, 主張が得られる. □

系 8.9. (Kiepert 型公式) $(d, s) = (5, 6)$ とする. $u \in \kappa^{-1}\iota(C)$ のとき, 次の等式が成り立つ:

$$\psi_n(u) := \frac{\sigma_{\natural^n}(nu)}{\sigma_\sharp(u)^{n(4n-3)}} = \pm\, y^{n(n-1)/2}(u) \cdot \left| (x^{a_j} y^{b_j})^{(i-1)} \right|_{2 \leqq i,j \leqq n} (u).$$

但し $^{(i)}$ は $(\mathrm{d}/\mathrm{d}u_{\langle 1\rangle})^i$ を意味し, 行列式は $(n-1) \times (n-1)$ 型である. 符号 "±" もすべての λ_j が 0 の場合から, しかるべくして計算できる.

証明 6.1 の左辺の Vandermonde 行列式の各因子 $x(u^{(i)}) - x(u^{(j)})$ について

$$\lim_{v \to u} \frac{x(u) - x(v)}{u_{\langle 1\rangle} - v_{\langle 1\rangle}} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u_{\langle 1\rangle}}(u) = 5y(u) \tag{8.10}$$

を考慮し, 8.6 を使ふ. □

9 Table of peeling

9.1 表 25-1a

Weight 0		
Weight	Function	Stratum
Result		

9.2 表 25-1b

Weight 1			1
Weight	Function	Stratum	$\langle 1\rangle$
0	$\langle\,\rangle$	9	$1/1!$
Result			0

9.3 表 25-2a

Weight 2			1	2
Weight	Function	Stratum	$\langle 11\rangle$	$\langle 2\rangle$
0	$\langle\,\rangle$	9	$1/2!$	$1/1!/2$
Result			1	-1

9.4 表 25-2b

Weight 2			1	2
Weight	Function	Stratum	$\langle 11\rangle$	$\langle 2\rangle$
0	$\langle\,\rangle$	9	$1/2!$	$1/1!/2$
1	$\langle 1\rangle$	8	$1/1!$	0
Result			0	0

9.5 表 25-3a

Weight 3 on $\Theta^{[7]}$			1	2	3
Weight	Function	Stratum	$\langle 111 \rangle$	$\langle 21 \rangle$	$\langle 3 \rangle$
0	$\langle\,\rangle$	9	1/3!	2/2!/2	1/1!/3
1	$\langle 1 \rangle$	8	1/2!	1/1!/2	0
Result			1	-1	1

9.6 表 25-3b

Weight 3 on $\Theta^{[6]}$			1	2	3
Weight	Function	Stratum	$\langle 111 \rangle$	$\langle 21 \rangle$	$\langle 3 \rangle$
0	$\langle\,\rangle$	9	1/3!	2/2!/2	1/1!/3
1	$\langle 1 \rangle$	8	1/2!	1/1!/2	0
2	$\langle 11 \rangle$	7	1/1!	0	0
2	$\langle 2 \rangle$	7	0	1/1!	0
Result			0	0	0

9.7 表 25-4a

Weight 4 on $\Theta^{[6]}$			1	2	3	4	5
Weight	Function	Stratum	$\langle 1111 \rangle$	$\langle 211 \rangle$	$\langle 22 \rangle$	$\langle 31 \rangle$	$\langle 4 \rangle$
0	$\langle\,\rangle$	9	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	2/2!/3	1/1!/4
1	$\langle 1 \rangle$	8	1/3!	2/2!/2	0	1/1!/3	0
2	$\langle 11 \rangle$	7	1/2!	1/1!/2	0	0	0
2	$\langle 2 \rangle$	7	0	1/2!	1/1!/2	0	0
Result			-1	1	-1	-1	1

9.8 表 25-4b

Weight 4 on $\Theta^{[5]}$			1	2	3	4	5
Weight	Function	Stratum	$\langle 1111 \rangle$	$\langle 211 \rangle$	$\langle 22 \rangle$	$\langle 31 \rangle$	$\langle 4 \rangle$
0	$\langle\,\rangle$	9	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	2/2!/3	1/1!/4
1	$\langle 1 \rangle$	8	1/3!	2/2!/2	0	1/1!/3	0
2	$\langle 11 \rangle$	7	1/2!	1/1!/2	0	0	0
2	$\langle 2 \rangle$	7	0	1/2!	1/1!/2	0	0
3	$\langle 111 \rangle$	6	1/1!	0	0	0	0
3	$\langle 21 \rangle$	6	0	1/1!	0	0	0
3	$\langle 3 \rangle$	6	0		0	1/1!	0
Result			0	0	0	0	0

9.9 表 25-5a

Weight 5 on $\Theta^{[5]}$			1	2	3	4	5	6
Weight	Function	Stratum	$\langle 11111\rangle$	$\langle 2111\rangle$	$\langle 221\rangle$	$\langle 311\rangle$	$\langle 32\rangle$	$\langle 41\rangle$
0	$\langle\,\rangle$	9	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	3/3!/3	2/2!/6	2/2!/4
1	$\langle 1\rangle$	8	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	2/2!/3	0	1/1!/4
2	$\langle 11\rangle$	7	1/3!	2/2!/2	0	1/1!/3	0	0
2	$\langle 2\rangle$	7	0	1/3!	2/2!/2	0	1/1!/3	0
3	$\langle 111\rangle$	6	1/2!	1/1!/2	0	0	0	0
3	$\langle 21\rangle$	6	0	1/2!	1/1!/2	0	0	0
3	$\langle 3\rangle$	6	0	0	0	1/2!	1/1!/2	0
Result			0	0	0	0	0	0

9.10 表 25-5b

Weight 5 on $\Theta^{[6]}$			1	2	3	4	5	6
Weight	Function	Stratum	$\langle 11111\rangle$	$\langle 2111\rangle$	$\langle 221\rangle$	$\langle 311\rangle$	$\langle 32\rangle$	$\langle 41\rangle$
0	$\langle\,\rangle$	9	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	3/3!/3	2/2!/6	2/2!/4
1	$\langle 1\rangle$	8	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	2/2!/3	0	1/1!/4
2	$\langle 11\rangle$	7	1/3!	2/2!/2	0	1/1!/3	0	0
2	$\langle 2\rangle$	7	0	1/3!	2/2!/2	0	1/1!/3	0
3	$\langle 111\rangle - \langle 3\rangle$	7	1/2!	1/1!/2	0	$-1/2!$	$-1/1!/2$	0
3	$\langle 21\rangle + \langle 3\rangle$	7	0	1/2!	1/1!/2	1/2!	1/1!/2	0
Result			-5	3	-1	-2	0	1

$\mathrm{aw}(6) = 4 < 5$ なので, この計算は使ひたくなかつた. しかし, これなしでは stratum $\Theta^{[5]}$ の weight 7 の sigma derivatives が 1 次元であることを示せない. 以下では $\sigma_{\langle 32\rangle}(\Theta^{[6]}) = 0$ であることのみ使ふ.

9.11 表 25-6

Weight 6 on $\Theta^{[5]}$			1	2	3	4	5	6	7	8	9
Weight	Function	Stratum	$\langle 111111\rangle$	$\langle 21111\rangle$	$\langle 2211\rangle$	$\langle 222\rangle$	$\langle 3111\rangle$	$\langle 321\rangle$	$\langle 33\rangle$	$\langle 411\rangle$	$\langle 42\rangle$
0	$\langle\,\rangle$	9	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	4/4!/3	6/3!/6	1/2!/9	3/3!/4	2/2!/8
1	$\langle 1\rangle$	8	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	3/3!/3	2/2!/6	0	2/2!/2	0
2	$\langle 11\rangle$	7	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	0	2/2!/3	0	0	1/1!	0
	$\langle 2\rangle$	7	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	0	2/2!/3	0	0	1/1!/4
3	$\langle 111\rangle$	6	1/3!	2/2!/2	0	0	1/1!/3	0	0	0	0
	$\langle 21\rangle$	6	0	1/3!	2/2!/2	0	0	1/1!/3	0	0	0
	$\langle 3\rangle$	6	0	0	0	0	1/3!	2/2!/2	1/1!/3	0	0
	$\langle 1111\rangle + \langle 4\rangle$	6	1/2!	1/1!/2	0	0	0	0	0	1/1!	1/1!/2
	$\langle 211\rangle - \langle 4\rangle$	6	0	1/2!	1/1!/2	0	0	0	0	−1/1!	−1/1!/2
	$\langle 22\rangle + \langle 4\rangle$	6	0	0	1/2!	1/1!/2	0	0	0	1/1!	1/1!/2
	$\langle 31\rangle + \langle 4\rangle$	6	0	0	0	0	1/2!	1/1!/2	0	1/1!	1/1!/2
Result			0	0	0	0	0	0	0	0	0

9.12　表 25-7

Weight 7 on $\Theta^{[5]}$			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Weight	Function	Stratum	$\langle 1^7\rangle$	$\langle 211111\rangle$	$\langle 22111\rangle$	$\langle 2221\rangle$	$\langle 31111\rangle$	$\langle 3211\rangle$	$\langle 322\rangle$	$\langle 331\rangle$	$\langle 4111\rangle$	$\langle 421\rangle$	$\langle 43\rangle$	$\langle 7\rangle$
0	$\langle\,\rangle$	9	1/7!	6/6!/2	10/5!/4	4/4!/8	5/5!/3	12/4!/6	3/3!/12	3/3!/9	4/4!/4	6/3!/8	2/2!/12	1/1!/7
1	$\langle 1\rangle$	8	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	4/4!/3	6/3!/6	0	1/2!/9	3/3!/4	2/2!/8	0	0
2	$\langle 11\rangle$	7	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	3/3!/3	2/2!/6	0	0	2/2!/4	0	0	0
	$\langle 2\rangle$	7	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	3/3!/3	2/2!/6	0	0	2/2!/4	0	0
3	$\langle 111\rangle$	6	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	0	2/2!/3	0	0	0	1/1!/4	0	0	0
	$\langle 21\rangle$	6	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	0	2/2!/3	0	0	0	1/1!/4	0	0
	$\langle 3\rangle$	6	0	0	0	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	2/2!/3	0	0	1/1!/4	0
4	$\langle 1111\rangle + \langle 4\rangle$	6	1/3!	2/2!/2	0	0	1/1!/3	0	0	0	1/3!	2/2!/2	1/1!/3	0
	$\langle 211\rangle - \langle 4\rangle$	6	0	1/3!	2/2!/2	0	0	1/1!/3	0	0	−1/3!	−2/2!/2	−1/1!/3	0
	$\langle 22\rangle + \langle 4\rangle$	6	0	0	1/3!	2/2!/2	0	0	1/1!/3	0	1/3!	2/2!/2	1/1!/3	0
	$\langle 31\rangle + \langle 4\rangle$	6	0	0	0	0	1/3!	2/2!/2	0	1/1!/3	1/3!	2/2!/2	1/1!/3	0
5	$\langle 32\rangle$	6	0	0	0	0	0	1/2!	1/1!/2	0	0	0	0	0
Result			15	−5	−1	3	3	1	−1	0	−1	−1	−1	1

9.13 表 25-8

Weight 8 on $\Theta^{[5]}$			1	2	3	4	5	6	7	8
Weight	Function	Stratum	⟨1^8⟩	⟨2111111⟩	⟨221111⟩	⟨22211⟩	⟨2222⟩	⟨311111⟩	⟨32111⟩	⟨3221⟩
0	⟨ ⟩	9	1/8!	7/7!/2	15/6!/4	10/5!/8	1/4!/16	6/6!/3	20/5!/6	12/4!/12
1	⟨1⟩	8	1/7!	6/6!/2	10/5!/4	6/4!/8	0	5/5!/3	12/4!/6	3/3!/12
2	⟨11⟩	7	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	0	4/4!/3	6/3!/6	0
	⟨2⟩	7	0	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	0	4/4!/3	6/3!/6
3	⟨111⟩	6	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	0	3/3!/3	2/2!/6	0
	⟨21⟩	6	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	0	3/3!/3	2/2!/6
	⟨3⟩	6	0	0	0	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4
4	⟨1111⟩	5	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	0	0	2/2!/3	0	0
	⟨211⟩	5	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	0	0	2/2!/3	0
	⟨22⟩	5	0	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	0	0	2/2!/3
	⟨31⟩	5	0	0	0	0	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4
	⟨4⟩	5	0	0	0	0	0	0	0	0
5	⟨11111⟩	5	1/3!	2/2!/2	0	0	0	1/1!/3	0	0
	⟨2111⟩	5	0	1/3!	2/2!/2	0	0	0	1/1!/3	0
	⟨221⟩	5	0	0	1/3!	2/2!/2	0	0	0	1/1!/3
	⟨311⟩	5	0	0	0	0	0	1/3!	2/2!/2	0
	⟨32⟩	5	0	0	0	0	0	0	1/3!	2/2!/2
	⟨41⟩	5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	⟨111111⟩	5	1/2!	1/1!/2	0	0	0	0	0	0
Result			0	0	0	0	0	0	0	0

	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Function	⟨3311⟩	⟨332⟩	⟨41111⟩	⟨4211⟩	⟨422⟩	⟨431⟩	⟨44⟩	⟨71⟩	⟨8⟩
⟨ ⟩	6/4!/9	3/3!/18	5/5!/4	12/4!/8	3/3!/16	6/3!/12	1/2!/16	2/2!/7	1/1!/8
⟨1⟩	3/3!/9	0	4/4!/4	6/3!/8	0	2/2!/12	0	1/1!/7	0
⟨11⟩	1/2!/9	0	3/3!/4	2/2!/8	0	0	0	0	0
⟨2⟩	0	1/2!/9	0	3/3!/4	2/2!/8	0	0	0	0
⟨111⟩	0	0	2/2!/4	0	0	0	0	0	0
⟨21⟩	0	0	0	2/2!/4	0	0	0	0	0
⟨3⟩	3/3!/3	2/2!/6	0	0	0	2/2!/4	0	0	0
⟨1111⟩	0	0	1/1!/4	0	0	0	0	0	0
⟨211⟩	0	0	0	1/1!/4	0	0	0	0	0
⟨22⟩	0	0	0	0	1/1!/4	0	0	0	0
⟨31⟩	2/2!/3	0	0	0	0	1/1!/4	0	0	0
⟨4⟩	0	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	2/2!/3	1/1!/4	0	0
⟨11111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨2111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨221⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨311⟩	1/1!/3	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨32⟩	0	1/1!/3	0	0	0	0	0	0	0
⟨41⟩	0	0	1/3!	2/2!/2	0	1/1!/3	0	0	0
⟨111111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0

9.14　表 25-9

(その 1)

Weight 9			1	2	3	4	5	6
Weight	Function	Stratum	$\langle 1^{10}\rangle$	$\langle 21^{8}\rangle$	$\langle 221^{6}\rangle$	$\langle 2221^{4}\rangle$	$\langle 222211\rangle$	$\langle 2^{5}\rangle$
0	$\langle\,\rangle$	9	1/10!	9/9!/2	28/8!/4	35/7!/8	15/6!/16	1/5!/32
1	$\langle 1\rangle$	8	1/9!	8/8!/2	21/7!/4	20/6!/8	5/5!/16	0
2	$\langle 11\rangle$	7	1/8!	7/7!/2	15/6!/4	10/5!/8	1/4!/16	0
	$\langle 2\rangle$	7	0	1/8!	7/7!/2	15/6!/4	10/5!/8	1/4!/16
3	$\langle 111\rangle$	6	1/7!	6/6!/2	10/5!/4	4/4!/8	0	0
	$\langle 21\rangle$	6	0	1/7!	6/6!/2	10/5!/4	4/4!/8	0
	$\langle 3\rangle$	6	0	0	0	0	0	0
4	$\langle 1111\rangle$	5	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	0	0
	$\langle 211\rangle$	5	0	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	0
	$\langle 22\rangle$	5	0	0	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8
	$\langle 31\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
	$\langle 4\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
5	$\langle 11111\rangle$	5	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	0	0
	$\langle 2111\rangle$	5	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	0
	$\langle 221\rangle$	5	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0
	$\langle 311\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
	$\langle 32\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
	$\langle 41\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
6	$\langle 111111\rangle$	5	1/4!	3/3!/2	0	0	0	0
	$\langle 21111\rangle$	5	0	1/4!	3/3!/2	0	0	0
	$\langle 2211\rangle$	5	0	0	1/4!	3/3!/2	0	0
	$\langle 222\rangle$	5	0	0	0	1/4!	3/3!/2	0
	$\langle 3111\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
	$\langle 321\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
	$\langle 33\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
	$\langle 411\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
	$\langle 42\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
7	$\langle 331\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
	$\langle 43\rangle$	$5, \langle 7\rangle, -1$	0	0	0	0	0	0
	$\langle 7\rangle$	$5, \langle 7\rangle, \;\; 1$	0	0	0	0	0	0
Result			0	0	0	0	0	0

表 25-9 (その 2)

	7	8	9	10	11	12
Function	$\langle 31^7\rangle$	$\langle 321^5\rangle$	$\langle 3221^3\rangle$	$\langle 32221\rangle$	$\langle 331^4\rangle$	$\langle 33211\rangle$
$\langle\,\rangle$	8/8!/3	42/7!/6	60/6!/12	20/5!/24	15/6!/9	30/5!/18
$\langle 1\rangle$	7/7!/3	30/6!/6	30/5!/12	0	10/5!/9	12/4!/18
$\langle 11\rangle$	6/6!/3	20/5!/6	12/4!/12	0	6/4!/9	3/3!/18
$\langle 2\rangle$	0	6/6!/3	20/5!/6	12/4!/12	0	6/4!/9
$\langle 111\rangle$	5/5!/3	12/4!/6	3/3!/12	0	3/3!/9	0
$\langle 21\rangle$	0	5/5!/3	12/4!/6	3/3!/12	0	3/3!/9
$\langle 3\rangle$	1/7!	6/6!/2	10/5!/4	4/4!/8	5/5!/3	12/4!/6
$\langle 1111\rangle$	4/4!/3	6/3!/6	0	0	1/2!/9	0
$\langle 211\rangle$	0	4/4!/3	6/3!/6	0	0	1/2!/9
$\langle 22\rangle$	0	0	4/4!/3	6/3!/6	0	0
$\langle 31\rangle$	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	4/4!/3	6/3!/6
$\langle 4\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 11111\rangle$	3/3!/3	2/2!/6	0	0	0	0
$\langle 2111\rangle$	0	3/3!/3	2/2!/6	0	0	0
$\langle 221\rangle$	0	0	3/3!/3	2/2!/6	0	0
$\langle 311\rangle$	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	3/3!/3	2/2!/6
$\langle 32\rangle$	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	3/3!/3
$\langle 41\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 111111\rangle$	2/2!/3	0	0	0	0	0
$\langle 21111\rangle$	0	2/2!/3	0	0	0	0
$\langle 2211\rangle$	0	0	2/2!/3	0	0	0
$\langle 222\rangle$	0	0	0	2/2!/3	0	0
$\langle 3111\rangle$	1/4!	3/3!/2	0	0	2/2!/3	0
$\langle 321\rangle$	0	1/4!	0	1/2!/4	0	2/2!/3
$\langle 33\rangle$	0	0	0	0	1/4!	3/3!/2
$\langle 411\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 42\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 331\rangle$	0	0	0	0	1/3!	2/2!/2
$\langle 43\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 7\rangle$	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0

表 25-9 (その 3)

	13	14	15	16	17	18
Function	$\langle 3322\rangle$	$\langle 3331\rangle$	$\langle 41^6\rangle$	$\langle 421^4\rangle$	$\langle 42211\rangle$	$\langle 4222\rangle$
$\langle\,\rangle$	6/4!/36	4/4!/27	7/7!/4	30/6!/8	30/5!/16	4/4!/32
$\langle 1\rangle$	0	1/3!/27	6/6!/4	20/5!/8	12/4!/16	0
$\langle 11\rangle$	0	0	5/5!/4	12/4!/8	3/3!/16	0
$\langle 2\rangle$	3/3!/18	0	0	5/5!/4	12/4!/8	3/3!/16
$\langle 111\rangle$	0	0	4/4!/4	6/3!/8	0	0
$\langle 21\rangle$	0	0	0	4/4!/4	6/3!/8	0
$\langle 3\rangle$	3/3!/12	3/3!/9	0	0	0	0
$\langle 1111\rangle$	0	0	3/3!/4	2/2!/8	0	0
$\langle 211\rangle$	0	0	0	3/3!/4	2/2!/8	0
$\langle 22\rangle$	1/2!/9	0	0	0	3/3!/4	2/2!/8
$\langle 31\rangle$	0	1/2!/9	0	0	0	0
$\langle 4\rangle$	0	0	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8
$\langle 11111\rangle$	0	0	2/2!/4	0	0	0
$\langle 2111\rangle$	0	0	0	2/2!/4	0	0
$\langle 221\rangle$	0	0	0	0	2/2!/4	0
$\langle 311\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 32\rangle$	2/2!/6	0	0	0	0	0
$\langle 41\rangle$	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0
$\langle 111111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 21111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 2211\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 222\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 3111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 321\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 33\rangle$	1/2!/4	2/2!/3	0	0	0	0
$\langle 411\rangle$	0	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	0
$\langle 42\rangle$	0	0	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4
$\langle 331\rangle$	0	1/1!/3	0	0	0	0
$\langle 43\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 7\rangle$	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0

表 25-9 (その 4)

	19	20	21	22	23	24
Function	$\langle 43111\rangle$	$\langle 4321\rangle$	$\langle 433\rangle$	$\langle 4411\rangle$	$\langle 442\rangle$	$a7111$
$\langle\,\rangle$	20/5!/12	24/4!/24	3/3!/36	6/4!/16	3/3!/32	4/4!/7
$\langle 1\rangle$	12/4!/12	6/3!/24	0	3/3!/16	0	3/3!/7
$\langle 11\rangle$	6/3!/12	0	0	1/2!/16	0	2/2!/7
$\langle 2\rangle$	0	6/3!/12	0	0	1/2!/16	0
$\langle 111\rangle$	2/2!/12	0	0	0	0	1/1!/7
$\langle 21\rangle$	0	2/2!/12	0	0	0	0
$\langle 3\rangle$	4/4!/4	6/3!/8	2/2!/12	0	0	0
$\langle 1111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 211\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 22\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 31\rangle$	3/3!/4	2/2!/8	0	0	0	0
$\langle 4\rangle$	4/4!/3	6/3!/6	1/2!/9	3/3!/4	2/2!/8	0
$\langle 11111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 2111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 221\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 311\rangle$	2/2!/4	0	0	0	0	0
$\langle 32\rangle$	0	2/2!/4	0	0	0	0
$\langle 41\rangle$	3/3!/3	2/2!/6	0	2/2!/4	0	0
$\langle 111111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 21111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 2211\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 222\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 3111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 321\rangle$	0	1/1!/4	0	0	0	0
$\langle 33\rangle$	0	0	1/1!/4	0	0	0
$\langle 411\rangle$	2/2!/3	0	0	1/1!/4	0	0
$\langle 42\rangle$	0	2/2!/3	0	0	1/1!/4	0
$\langle 331\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 43\rangle$	1/3!	2/2!/2	1/1!/3	0	0	0
$\langle 7\rangle$	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0

表 25-9 (その 5)

	25	26	27	28	29
Function	⟨721⟩	⟨73⟩	⟨811⟩	⟨82⟩	⟨91⟩
⟨ ⟩	6/3!/14	2/2!/21	3/3!/8	2/2!/16	2/2!/9
⟨1⟩	2/2!/14	0	2/2!/8	0	1/1!/9
⟨11⟩	0	0	1/1!/8	0	0
⟨2⟩	2/2!/7	0	0	1/1!/8	0
⟨111⟩	0	0	0	0	0
⟨21⟩	1/1!/7	0	0	0	0
⟨3⟩	0	1/1!/7	0	0	0
⟨1111⟩	0	0	0	0	0
⟨211⟩	0	0	0	0	0
⟨22⟩	0	0	0	0	0
⟨31⟩	0	0	0	0	0
⟨4⟩	0	0	0	0	0
⟨11111⟩	0	0	0	0	0
⟨2111⟩	0	0	0	0	0
⟨221⟩	0	0	0	0	0
⟨311⟩	0	0	0	0	0
⟨32⟩	0	0	0	0	0
⟨41⟩	0	0	0	0	0
⟨111111⟩	0	0	0	0	0
⟨21111⟩	0	0	0	0	0
⟨2211⟩	0	0	0	0	0
⟨222⟩	0	0	0	0	0
⟨3111⟩	0	0	0	0	0
⟨321⟩	0	0	0	0	0
⟨33⟩	0	0	0	0	0
⟨411⟩	0	0	0	0	0
⟨42⟩	0	0	0	0	0
⟨331⟩	0	0	0	0	0
⟨43⟩	0	0	0	0	0
⟨7⟩	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0

9.15　表 25-10

(その 1)

Weight 10			1	2	3	4	5	6
Weight	Function	Stratum	$\langle 1^{10}\rangle$	$\langle 21^{8}\rangle$	$\langle 221^{6}\rangle$	$\langle 2221^{4}\rangle$	$\langle 222211\rangle$	$\langle 22222\rangle$
0	$\langle\,\rangle$	9	1/10!	9/9!/2	28/8!/4	35/7!/8	15/6!/16	1/5!/32
1	$\langle 1\rangle$	8	1/9!	8/8!/2	21/7!/4	20/6!/8	5/5!/16	0
2	$\langle 11\rangle$	7	1/8!	7/7!/2	15/6!/4	10/5!/8	1/4!/16	0
	$\langle 2\rangle$	7	0	1/8!	7/7!/2	15/6!/4	10/5!/8	1/4!/16
3	$\langle 111\rangle$	7	1/7!	6/6!/2	10/5!/4	4/4!/8	0	0
	$\langle 21\rangle$	6	0	1/7!	6/6!/2	10/5!/4	4/4!/8	0
	$\langle 3\rangle$	6	0	0	0	0	0	0
4	$\langle 1111\rangle$	5	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	0	0
	$\langle 211\rangle$	5	0	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	0
	$\langle 22\rangle$	5	0	0	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8
	$\langle 31\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
	$\langle 4\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
5	$\langle 11111\rangle$	$6, \langle 41\rangle, -5$	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	0	0
	$\langle 2111\rangle$	$6, \langle 41\rangle,\ \ 3$	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	0
	$\langle 221\rangle$	$6, \langle 41\rangle - 1$	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0
	$\langle 311\rangle$	$6, \langle 41\rangle, -2$	0	0	0	0	0	0
	$\langle 32\rangle$	6	0	0	0	0	0	0
	$\langle 41\rangle$	$6, \langle 41\rangle,\ \ 1$	0	0	0	0	0	0
6	$\langle 111111\rangle$	6	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	0	0	0
	$\langle 21111\rangle$	6	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	0	0
	$\langle 2211\rangle$	6	0	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	0
	$\langle 222\rangle$	6	0	0	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4
	$\langle 3111\rangle$	6	0	0	0	0	0	0
	$\langle 321\rangle$	6	0	0	0	0	0	0
	$\langle 33\rangle$	6	0	0	0	0	0	0
	$\langle 411\rangle$	6	0	0	0	0	0	0
	$\langle 42\rangle$	6	0	0	0	0	0	0
7	$\langle 1111111\rangle$	$5, \langle 7\rangle,\ 15$	1/3!	2/2!/2	0	0	0	0
	$\langle 211111\rangle$	$5, \langle 7\rangle, -5$	0	1/3!	2/2!/2	0	0	0
	$\langle 22111\rangle$	$5, \langle 7\rangle, -1$	0	0	1/3!	2/2!/2	0	0
	$\langle 2221\rangle$	$5, \langle 7\rangle,\ \ 3$	0	0	0	1/3!	2/2!/2	0
	$\langle 31111\rangle$	$5, \langle 7\rangle,\ \ 3$	0	0	0	0	0	0
	$\langle 3211\rangle$	$5, \langle 7\rangle,\ \ 1$	0	0	0	0	0	0
	$\langle 322\rangle$	$5, \langle 7\rangle, -1$	0	0	0	0	0	0
	$\langle 331\rangle$	$5, \langle 7\rangle,\ \ 0$	0	0	0	0	0	0
	$\langle 4111\rangle$	$5, \langle 7\rangle, -1$	0	0	0	0	0	0
	$\langle 421\rangle$	$5, \langle 7\rangle, -1$	0	0	0	0	0	0
	$\langle 43\rangle$	$5, \langle 7\rangle, -1$	0	0	0	0	0	0
	$\langle 7\rangle$	$5, \langle 7\rangle,\ \ 1$	0	0	0	0	0	0
Result			−225	55	−5	3	−9	15

表 25-10 (その 2)

	7	8	9	10	12	13
Function	$\langle 31^7 \rangle$	$\langle 3211111 \rangle$	$\langle 322111 \rangle$	$\langle 32221 \rangle$	$\langle 331111 \rangle$	$\langle 33211 \rangle$
$\langle \, \rangle$	8/8!/3	42/7!/6	60/6!/12	20/5!/24	15/6!/9	30/5!/18
$\langle 1 \rangle$	7/7!/3	30/6!/6	30/5!/12	4/4!/24	10/5!/9	12/4!/18
$\langle 11 \rangle$	6/6!/3	20/5!/6	12/4!/12	0	6/4!/9	3/3!/18
$\langle 2 \rangle$	0	6/6!/3	20/5!/6	12/4!/12	0	6/4!/9
$\langle 111 \rangle$	5/5!/3	12/4!/6	3/3!/12	0	3/3!/9	0
$\langle 21 \rangle$	0	5/5!/3	12/4!/6	3/3!/12	0	3/3!/9
$\langle 3 \rangle$	1/7!	6/6!/2	10/5!/4	4/4!/8	5/5!/3	12/4!/6
$\langle 1111 \rangle$	4/4!/3	6/3!/6	0	0	1/2!/9	0
$\langle 211 \rangle$	0	4/4!/3	6/3!/6	0	0	1/2!/9
$\langle 22 \rangle$	0	0	4/4!/3	6/3!/6	0	0
$\langle 31 \rangle$	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	4/4!/3	6/3!/6
$\langle 4 \rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 11111 \rangle$	3/3!/3	2/2!/6	0	0	0	0
$\langle 2111 \rangle$	0	3/3!/3	2/2!/6	0	0	0
$\langle 221 \rangle$	0	0	3/3!/3	2/2!/6	0	0
$\langle 311 \rangle$	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	3/3!/3	2/2!/6
$\langle 32 \rangle$	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	3/3!/3
$\langle 41 \rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 111111 \rangle$	2/2!/3	0	0	0	0	0
$\langle 21111 \rangle$	0	2/2!/3	0	0	0	0
$\langle 2211 \rangle$	0	0	2/2!/3	0	0	0
$\langle 222 \rangle$	0	0	0	2/2!/3	0	0
$\langle 3111 \rangle$	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	0	2/2!/3	0
$\langle 321 \rangle$	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	0	2/2!/3
$\langle 33 \rangle$	0	0	0	0	1/4!	3/3!/2
$\langle 411 \rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 42 \rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 1111111 \rangle$	1/1!/3	0	0	0	0	0
$\langle 211111 \rangle$	0	1/1!/3	0	0	0	0
$\langle 22111 \rangle$	0	0	1/1!/3	0	0	0
$\langle 2221 \rangle$	0	0	0	1/1!/3	0	0
$\langle 31111 \rangle$	1/3!	2/2!/2	0	0	1/1!/3	0
$\langle 3211 \rangle$	0	1/3!	2/2!/2	0	0	1/1!/3
$\langle 322 \rangle$	0	0	1/3!	2/2!/2	0	0
$\langle 331 \rangle$	0	0	0	0	1/3!	2/2!/2
$\langle 4111 \rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 421 \rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 43 \rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 7 \rangle$	0	0	0	0	0	0
Result	-15	-5	1	3	6	-2

表 25-10 (その 3)

	14	15	16	17	18	19
Function	$\langle 3322\rangle$	$\langle 3331\rangle$	$\langle 41^6\rangle$	$\langle 421111\rangle$	$\langle 42211\rangle$	$\langle 4222\rangle$
$\langle\,\rangle$	6/4!/36	4/4!/27	7/7!/4	30/6!/8	30/5!/16	4/4!/32
$\langle 1\rangle$	0	1/3!/27	6/6!/4	20/5!/8	12/4!/16	0
$\langle 11\rangle$	0	0	5/5!/4	12/4!/8	3/3!/16	0
$\langle 2\rangle$	3/3!/18	0	0	5/5!/4	12/4!/8	3/3!/16
$\langle 111\rangle$	0	0	4/4!/4	6/3!/8	0	0
$\langle 21\rangle$	0	0	0	4/4!/4	6/3!/8	0
$\langle 3\rangle$	3/3!/12	3/3!/9	0	0	0	0
$\langle 1111\rangle$	0	0	3/3!/4	2/2!/8	0	0
$\langle 211\rangle$	0	0	0	3/3!/4	2/2!/8	0
$\langle 22\rangle$	1/2!/9	0	0	0	3/3!/4	2/2!/8
$\langle 31\rangle$	0	1/2!/9	0	0	0	0
$\langle 4\rangle$	0	0	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8
$\langle 11111\rangle$	0	0	2/2!/4	0	0	0
$\langle 2111\rangle$	0	0	0	2/2!/4	0	0
$\langle 221\rangle$	0	0	0	0	2/2!/4	0
$\langle 311\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 32\rangle$	2/2!/6	0	0	0	0	0
$\langle 41\rangle$	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0
$\langle 111111\rangle$	0	0	1/1!/4	0	0	0
$\langle 21111\rangle$	0	0	0	1/1!/4	0	0
$\langle 2211\rangle$	0	0	0	0	1/1!/4	0
$\langle 222\rangle$	0	0	0	0	0	1/1!/4
$\langle 3111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 321\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 33\rangle$	1/2!/4	2/2!/3	0	0	0	0
$\langle 411\rangle$	0	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	0
$\langle 42\rangle$	0	0	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4
$\langle 1111111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 211111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 22111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 2221\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 31111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 3211\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 322\rangle$	1/1!/3	0	0	0	0	0
$\langle 331\rangle$	0	1/1!/3	0	0	0	0
$\langle 4111\rangle$	0	0	1/3!	2/2!/2	0	0
$\langle 421\rangle$	0	0	0	1/3!	2/2!/2	0
$\langle 43\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 7\rangle$	0	0	0	0	0	0
Result	-2	0	5	1	1	-3

表 25-10 (その 4)

	20	21	22	23	24	25
Function	$\langle 43111\rangle$	$\langle 4321\rangle$	$\langle 433\rangle$	$\langle 4411\rangle$	$\langle 442\rangle$	$\langle 7111\rangle$
$\langle\,\rangle$	20/5!/12	24/4!/24	3/3!/36	6/4!/16	3/3!/32	4/4!/7
$\langle 1\rangle$	12/4!/12	6/3!/24	0	3/3!/16	0	3/3!/7
$\langle 11\rangle$	6/3!/12	0	0	1/2!/16	0	2/2!/7
$\langle 2\rangle$	0	6/3!/12	0	0	1/2!/16	0
$\langle 111\rangle$	2/2!/12	0	0	0	0	1/1!/7
$\langle 21\rangle$	0	2/2!/12	0	0	0	0
$\langle 3\rangle$	4/4!/4	6/3!/8	2/2!/12	0	0	0
$\langle 1111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 211\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 22\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 31\rangle$	3/3!/4	2/2!/8	0	0	0	0
$\langle 4\rangle$	4/4!/3	6/3!/6	1/2!/9	3/3!/4	2/2!/8	0
$\langle 11111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 2111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 221\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 311\rangle$	2/2!/4	0	0	0	0	0
$\langle 32\rangle$	0	2/2!/4	0	0	0	0
$\langle 41\rangle$	3/3!/3	2/2!/6	0	2/2!/4	0	0
$\langle 111111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 21111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 2211\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 222\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 3111\rangle$	1/1!/4	0	0	0	0	0
$\langle 321\rangle$	0	1/1!/4	0	0	0	0
$\langle 33\rangle$	0	0	1/1!/4	0	0	0
$\langle 411\rangle$	2/2!/3	0	0	1/1!/4	0	0
$\langle 42\rangle$	0	2/2!/3	0	0	1/1!/4	0
$\langle 1111111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 211111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 22111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 2221\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 31111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 3211\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 322\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 331\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 4111\rangle$	1/1!/3	0	0	0	0	0
$\langle 421\rangle$	0	1/1!/3	0	0	0	0
$\langle 43\rangle$	1/3!	2/2!/2	1/1!/3	0	0	0
$\langle 7\rangle$	0	0	0	0	0	1/3!
Result	-1	1	2	-1	-1	-1

表 25-10 (その 5)

	26	27	28	29	30
Function	$\langle 721\rangle$	$\langle 73\rangle$	$\langle 811\rangle$	$\langle 82\rangle$	$\langle 91\rangle$
$\langle\ \rangle$	6/3!/14	2/2!/21	3/3!/8	2/2!/16	2/2!/9
$\langle 1\rangle$	2/2!/14	0	2/2!/8	0	1/1!/9
$\langle 11\rangle$	0	0	1/1!/8	0	0
$\langle 2\rangle$	2/2!/7	0	0	1/1!/8	0
$\langle 111\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 21\rangle$	1/1!/7	0	0	0	0
$\langle 3\rangle$	0	1/1!/7	0	0	0
$\langle 1111\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 211\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 22\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 31\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 4\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 11111\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 2111\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 221\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 311\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 32\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 41\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 111111\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 21111\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 2211\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 222\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 3111\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 321\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 33\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 411\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 42\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 1111111\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 211111\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 22111\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 2221\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 31111\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 3211\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 322\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 331\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 4111\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 421\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 43\rangle$	0	0	0	0	0
$\langle 7\rangle$	2/2!/2	1/1!/3	0	0	0
Result	−1	−1	1	1	0

9.16 表 25-11

(その 1)

Weight 11			1	2	3	4	5	6
Weight	Function	Stratum	$\langle 1^{11}\rangle$	$\langle 21^9\rangle$	$\langle 221^7\rangle$	$\langle 2221^5\rangle$	$\langle 22221^3\rangle$	$\langle 2^51\rangle$
0	$\langle\,\rangle$	9	1/11!	10/10!/2	36/9!/4	56/8!/8	35/7!/16	6/6!/32
1	$\langle 1\rangle$	8	1/10!	9/9!/2	28/8!/4	35/7!/8	15/6!/16	1/5!/32
2	$\langle 11\rangle$	7	1/9!	8/8!/2	21/7!/4	20/6!/8	5/5!/16	0
	$\langle 2\rangle$	7	0	1/9!	8/8!/2	21/7!/4	20/6!/8	5/5!/16
3	$\langle 111\rangle$	6	1/8!	7/7!/2	15/6!/4	10/5!/8	1/4!/16	0
	$\langle 21\rangle$	6	0	1/8!	7/7!/2	15/6!/4	10/5!/8	1/4!/16
	$\langle 3\rangle$	6	0	0	0	0	0	0
4	$\langle 1111\rangle$	5	1/7!	6/6!/2	10/5!/4	4/4!/8	0	0
	$\langle 211\rangle$	5	0	1/7!	6/6!/2	10/5!/4	4/4!/8	0
	$\langle 22\rangle$	5	0	0	1/7!	6/6!/2	10/5!/4	4/4!/8
	$\langle 31\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
	$\langle 4\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
5	$\langle 11111\rangle$	5	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	0	0
	$\langle 2111\rangle$	5	0	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	0
	$\langle 221\rangle$	5	0	0	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8
	$\langle 311\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
	$\langle 32\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
	$\langle 41\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
6	$\langle 111111\rangle$	5	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	0	0
	$\langle 21111\rangle$	5	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	0
	$\langle 2211\rangle$	5	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0
	$\langle 222\rangle$	5	0	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4
	$\langle 3111\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
	$\langle 321\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
	$\langle 33\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
	$\langle 411\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
	$\langle 42\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
7	$\langle 1111111\rangle$	5	1/4!	3/3!/2	0	0	0	0
	$\langle 211111\rangle$	5	0	1/4!	3/3!/2	0	0	0
	$\langle 22111\rangle$	5	0	0	1/4!	3/3!/2	0	0
	$\langle 2221\rangle$	5	0	0	0	1/4!	3/3!/2	0
	$\langle 31111\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
	$\langle 3211\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
	$\langle 322\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
	$\langle 331\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
	$\langle 4111\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
	$\langle 421\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
	$\langle 43\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
	$\langle 7\rangle$	5	0	0	0	0	0	0
Result			0	0	0	0	0	0

表 25-11 (その 2)

	7	8	9	10	11	12	13
Function	$\langle 31^8\rangle$	$\langle 321^6\rangle$	$\langle 3221^4\rangle$	$\langle 32221^2\rangle$	$\langle 32^4\rangle$	$\langle 331^5\rangle$	$\langle 3321^3\rangle$
$\langle\,\rangle$	9/9!/3	56/8!/6	105/7!/12	60/6!/24	5/5!/48	21/7!/9	60/6!/18
$\langle 1\rangle$	8/8!/3	42/7!/6	60/6!/12	20/5!/24	0	15/6!/9	30/5!/18
$\langle 11\rangle$	7/7!/3	30/6!/6	30/5!/12	0	0	10/5!/9	12/4!/18
$\langle 2\rangle$	0	7/7!/3	30/6!/6	30/5!/12	4/4!/24	0	10/5!/9
$\langle 111\rangle$	6/6!/3	20/5!/6	12/4!/12	0	0	6/4!/9	3/3!/18
$\langle 21\rangle$	0	6/6!/3	20/5!/6	12/4!/12	0	0	6/4!/9
$\langle 3\rangle$	1/8!	7/7!/2	15/6!/4	10/5!/8	1/4!/16	6/6!/3	20/5!/6
$\langle 1111\rangle$	5/5!/3	12/4!/6	3/3!/12	0	0	3/3!/9	0
$\langle 211\rangle$	0	5/5!/3	12/4!/6	3/3!/12	0	0	3/3!/9
$\langle 22\rangle$	0	0	5/5!/3	12/4!/6	3/3!/12	0	0
$\langle 31\rangle$	1/7!	6/6!/2	10/5!/4	4/4!/8	0	5/5!/3	12/4!/6
$\langle 4\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 11111\rangle$	4/4!/3	6/3!/6	0	0	0	1/2!/9	0
$\langle 2111\rangle$	0	4/4!/3	6/3!/6	0	0	0	1/2!/9
$\langle 221\rangle$	0	0	4/4!/3	6/3!/6	0	0	0
$\langle 311\rangle$	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	0	4/4!/3	6/3!/6
$\langle 32\rangle$	0	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	0	0
$\langle 41\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 111111\rangle$	3/3!/3	2/2!/6	0	0	0	0	0
$\langle 21111\rangle$	0	3/3!/3	2/2!/6	0	0	0	0
$\langle 2211\rangle$	0	0	3/3!/3	2/2!/6	0	0	0
$\langle 222\rangle$	0	0	0	3/3!/3	2/2!/6	0	0
$\langle 3111\rangle$	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	0	3/3!/3	2/2!/6
$\langle 321\rangle$	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	0	3/3!/3
$\langle 33\rangle$	0	0	0	0	0	1/5!	4/4!/2
$\langle 411\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 42\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 1111111\rangle$	2/2!/3	0	0	0	0	0	0
$\langle 211111\rangle$	0	2/2!/3	0	0	0	0	0
$\langle 22111\rangle$	0	0	2/2!/3	0	0	0	0
$\langle 2221\rangle$	0	0	0	2/2!/3	0	0	0
$\langle 31111\rangle$	1/4!	3/3!/2	0	0	0	2/2!/3	0
$\langle 3211\rangle$	0	1/4!	0	1/2!/4	0	0	2/2!/3
$\langle 322\rangle$	0	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	0	0
$\langle 331\rangle$	0	0	0	0	0	1/4!	3/3!/2
$\langle 4111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 421\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 43\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 7\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
Result	0	0	0	0	0	0	0

表 25-11 (その 3)

	14	15	16	17	18	19	20
Function	$\langle 33221\rangle$	$\langle 3331^2\rangle$	$\langle 3332\rangle$	$\langle 41^7\rangle$	$\langle 421^5\rangle$	$\langle 4221^3\rangle$	$\langle 42221\rangle$
$\langle\,\rangle$	30/5!/36	10/5!/27	4/4!/54	8/8!/4	42/7!/8	60/6!/16	20/5!/32
$\langle 1\rangle$	6/4!/36	4/4!/27	0	7/7!/4	30/6!/8	30/5!/16	4/4!/32
$\langle 11\rangle$	0	1/3!/27	0	6/6!/4	20/5!/8	12/4!/16	0
$\langle 2\rangle$	12/4!/18	0	1/3!/27	0	6/6!/4	20/5!/8	12/4!/16
$\langle 111\rangle$	0	0	0	5/5!/4	12/4!/8	3/3!/16	0
$\langle 21\rangle$	3/3!/18	0	0	0	5/5!/4	12/4!/8	3/3!/16
$\langle 3\rangle$	12/4!/12	6/4!/9	3/3!/18	0	0	0	0
$\langle 1111\rangle$	0	0	0	4/4!/4	6/3!/8	0	0
$\langle 211\rangle$	0	0	0	0	4/4!/4	6/3!/8	0
$\langle 22\rangle$	3/3!/9	0	0	0	0	4/4!/4	6/3!/8
$\langle 31\rangle$	3/3!/12	3/3!/9	0	0	0	0	0
$\langle 4\rangle$	0	0	0	1/7!	6/6!/2	10/5!/4	4/4!/8
$\langle 11111\rangle$	0	0	0	3/3!/4	2/2!/8	0	0
$\langle 2111\rangle$	0	0	0	0	3/3!/4	2/2!/8	0
$\langle 221\rangle$	1/2!/9	0	0	0	0	3/3!/4	2/2!/8
$\langle 311\rangle$	0	1/2!/9	0	0	0	0	0
$\langle 32\rangle$	4/4!/3	0	1/2!/9	0	0	0	0
$\langle 41\rangle$	0	0	0	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8
$\langle 111111\rangle$	0	0	0	2/2!/4	0	0	0
$\langle 21111\rangle$	0	0	0	0	2/2!/4	0	0
$\langle 2211\rangle$	0	0	0	0	0	2/2!/4	0
$\langle 222\rangle$	0	0	0	0	0	0	2/2!/4
$\langle 3111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 321\rangle$	2/2!/6	0	0	0	0	0	0
$\langle 33\rangle$	3/3!/4	3/3!/3	2/2!/6	0	0	0	0
$\langle 411\rangle$	0	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0
$\langle 42\rangle$	0	0	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4
$\langle 1111111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 211111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 22111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 2221\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 31111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 3211\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 322\rangle$	1/2!/3	0	0	0	0	0	0
$\langle 331\rangle$	1/2!/4	2/2!/3	0	0	0	0	0
$\langle 4111\rangle$	0	0	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	0
$\langle 421\rangle$	0	0	0	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4
$\langle 43\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 7\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
Result	0	0	0	0	0	0	0

表 25-11 (その 4)

	21	22	23	24	25	26
Function	$\langle 431^4\rangle$	$\langle 43211\rangle$	$\langle 4322\rangle$	$\langle 4331\rangle$	$\langle 441^3\rangle$	$\langle 4421\rangle$
$\langle\,\rangle$	30/6!/12	60/5!/24	12/4!/48	12/4!/36	10/5!/16	12/4!/32
$\langle 1\rangle$	20/5!/12	24/4!/24	0	3/3!/36	6/4!/16	3/3!/32
$\langle 11\rangle$	12/4!/12	6/3!/24	0	0	3/3!/16	0
$\langle 2\rangle$	0	12/4!/12	6/3!/24	0	0	3/3!/16
$\langle 111\rangle$	6/3!/12	0	0	0	1/2!/16	0
$\langle 21\rangle$	0	6/3!/12	0	0	0	1/2!/16
$\langle 3\rangle$	5/5!/4	12/4!/8	3/3!/16	6/3!/12	0	0
$\langle 1111\rangle$	2/2!/12	0	0	0	0	0
$\langle 211\rangle$	0	2/2!/12	0	0	0	0
$\langle 22\rangle$	0	0	2/2!/12	0	0	0
$\langle 31\rangle$	4/4!/4	6/3!/8	0	2/2!/12	0	0
$\langle 4\rangle$	5/5!/3	12/4!/6	3/3!/12	3/3!/9	0	4/4!/4
$\langle 11111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 2111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 221\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 311\rangle$	3/3!/4	2/2!/8	0	0	0	0
$\langle 32\rangle$	0	3/3!/4	2/2!/8	0	0	0
$\langle 41\rangle$	4/4!/3	6/3!/6	0	1/2!/9	3/3!/4	2/2!/8
$\langle 111111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 21111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 2211\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 222\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 3111\rangle$	2/2!/4	0	0	0	0	0
$\langle 321\rangle$	0	2/2!/4	0	0	0	0
$\langle 33\rangle$	0	0	0	2/2!/4	0	0
$\langle 411\rangle$	3/3!/3	2/2!/6	0	0	2/2!/4	0
$\langle 42\rangle$	0	3/3!/3	2/2!/6	0	0	2/2!/4
$\langle 1111111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 211111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 22111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 2221\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 31111\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\langle 3211\rangle$	0	1/1!/4	0	0	0	0
$\langle 322\rangle$	0	0	1/1!/4	0	0	0
$\langle 331\rangle$	0	0	0	1/1!/4	0	0
$\langle 4111\rangle$	2/2!/3	0	0	0	1/1!/4	0
$\langle 421\rangle$	0	2/2!/3	0	0	0	1/1!/4
$\langle 43\rangle$	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	2/2!/3	0	0
$\langle 7\rangle$	0	0	0	0	0	0
Result	0	0	0	0	0	0

表 25-11 (その 5)

	27	28	29	30	31	32	33
Function	$\langle 443\rangle$	$\langle 71^4\rangle$	$\langle 721^2\rangle$	$\langle 722\rangle$	$\langle 731\rangle$	$\langle 74\rangle$	$\langle 81^3\rangle$
$\langle\,\rangle$	3/3!/48	5/5!/7	12/4!/14	3/3!/28	6/3!/21	2/2!/28	4/4!/8
$\langle 1\rangle$	0	4/4!/7	6/3!/14	0	2/2!/21	0	3/3!/8
$\langle 11\rangle$	0	3/3!/7	2/2!/14	0	0	0	2/2!/8
$\langle 2\rangle$	0	0	3/3!/7	2/2!/14	0	0	0
$\langle 111\rangle$	0	2/2!/7	0	0	0	0	1/1!/8
$\langle 21\rangle$	0	0	2/2!/7	0	0	0	0
$\langle 3\rangle$	1/2!/16	0	0	0	2/2!/7	0	0
$\langle 1111\rangle$	0	1/1!/7	0	0	0	0	0
$\langle 211\rangle$	0	0	1/1!/7	0	0	0	0
$\langle 22\rangle$	0	0	0	1/1!/7	0	0	0
$\langle 31\rangle$	0	0	0	0	1/1!/7	0	0
$\langle 4\rangle$	0	0	0	0	0	1/1!/7	0
$\langle 11111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 2111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 221\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 311\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 32\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 41\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 111111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 21111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 2211\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 222\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 3111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 321\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 33\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 411\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 42\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 1111111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 211111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 22111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 2221\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 31111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 3211\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 322\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 331\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 4111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 421\rangle$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 43\rangle$	1/1!/4	0	0	0	0	0	0
$\langle 7\rangle$	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	2/2!/3	1/1!/4	0
Result	0	0	0	0	0	0	0

表 25-11 (その 6)

	34	35	36	37
Function	⟨821⟩	⟨83⟩	⟨911⟩	⟨92⟩
⟨ ⟩	6/3!/16	2/2!/24	3/3!/9	2/2!/18
⟨1⟩	2/2!/16	0	2/2!/9	0
⟨11⟩	0	0	1/1!/9	0
⟨2⟩	2/2!/8	0	0	1/1!/9
⟨111⟩	0	0	0	0
⟨21⟩	1/1!/8	0	0	0
⟨3⟩	0	1/1!/8	0	0
⟨1111⟩	0	0	0	0
⟨211⟩	0	0	0	0
⟨22⟩	0	0	0	0
⟨31⟩	0	0	0	0
⟨4⟩	0	0	0	0
⟨11111⟩	0	0	0	0
⟨2111⟩	0	0	0	0
⟨221⟩	0	0	0	0
⟨311⟩	0	0	0	0
⟨32⟩	0	0	0	0
⟨41⟩	0	0	0	0
⟨111111⟩	0	0	0	0
⟨21111⟩	0	0	0	0
⟨2211⟩	0	0	0	0
⟨222⟩	0	0	0	0
⟨3111⟩	0	0	0	0
⟨321⟩	0	0	0	0
⟨33⟩	0	0	0	0
⟨411⟩	0	0	0	0
⟨42⟩	0	0	0	0
⟨1111111⟩	0	0	0	0
⟨211111⟩	0	0	0	0
⟨22111⟩	0	0	0	0
⟨2221⟩	0	0	0	0
⟨31111⟩	0	0	0	0
⟨3211⟩	0	0	0	0
⟨322⟩	0	0	0	0
⟨331⟩	0	0	0	0
⟨4111⟩	0	0	0	0
⟨421⟩	0	0	0	0
⟨43⟩	0	0	0	0
⟨7⟩	0	0	0	0
Result	0	0	0	0

9.17 表 25-12

（その 1）

Weight 12, 4th Stratum			1	2	3	4	5	6	7	8
Weight	Function	Stratum	$\langle 1^{12}\rangle$	$\langle 21^{10}\rangle$	$\langle 221^{8}\rangle$	$\langle 2221^{6}\rangle$	$\langle 22221^{4}\rangle$	$\langle 2^{5}11\rangle$	$\langle 2^{6}\rangle$	$\langle 31^{9}\rangle$
0	$\langle\,\rangle$	9	1/12!	11/11!/2	45/10!/4	84/9!/8	70/8!/16	21/7!/32	1/6!/64	10/10!/3
1	$\langle 1\rangle$	8	1/11!	10/10!/2	36/9!/4	56/8!/8	35/7!/16	6/6!/32	0	9/9!/3
2	$\langle 11\rangle$	7	1/10!	9/9!/2	28/8!/4	35/7!/8	15/6!/16	1/5!/32	0	8/8!/3
	$\langle 2\rangle$	7	0	1/10!	9/9!/2	28/8!/4	35/7!/8	15/6!/16	1/5!/32	0
3	$\langle 111\rangle$	6	1/9!	8/8!/2	21/7!/4	20/6!/8	5/5!/16	0	0	7/7!/3
	$\langle 21\rangle$	6	0	1/9!	8/8!/2	21/7!/4	20/6!/8	5/5!/16	0	0
	$\langle 3\rangle$	6	0	0	0	0	0	0	0	1/9!
4	$\langle 1111\rangle$	5	1/8!	7/7!/2	15/6!/4	10/5!/8	1/4!/16	0	0	6/6!/3
	$\langle 211\rangle$	5	0	1/8!	7/7!/2	15/6!/4	10/5!/8	1/4!/16	0	0
	$\langle 22\rangle$	5	0	0	1/8!	7/7!/2	15/6!/4	10/5!/8	1/4!/16	0
	$\langle 31\rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	1/8!
	$\langle 4\rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0
5	$\langle 11111\rangle$	5	1/7!	6/6!/2	10/5!/4	4/4!/8	0	0	0	5/5!/3
	$\langle 2111\rangle$	5	0	1/7!	6/6!/2	10/5!/4	4/4!/8	0	0	0
	$\langle 221\rangle$	5	0	0	1/7!	6/6!/2	10/5!/4	4/4!/8	0	0
	$\langle 311\rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	1/7!
	$\langle 32\rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\langle 41\rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	$\langle 111111\rangle$	5	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	0	0	0	4/4!/3
	$\langle 21111\rangle$	5	0	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	0	0	0
	$\langle 2211\rangle$	5	0	0	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	0	0
	$\langle 222\rangle$	5	0	0	0	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	0
	$\langle 3111\rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	1/6!
	$\langle 321\rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\langle 33\rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\langle 411\rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\langle 42\rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0
7	$\langle 1111111\rangle$	5	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	0	0	0	3/3!/3
	$\langle 211111\rangle$	5	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	0	0	0
	$\langle 22111\rangle$	5	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	0	0
	$\langle 2221\rangle$	5	0	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	0
	$\langle 31111\rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	1/5!
	$\langle 3211\rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\langle 322\rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\langle 331\rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\langle 4111\rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\langle 421\rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\langle 43\rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\langle 7\rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0
8	$\langle 11111111\rangle$	3	1/4!	3/3!/2	0	0	0	0	0	2/2!/3
	$\langle 2111111\rangle$	3	0	1/4!	3/3!/2	0	0	0	0	0
	$\langle 221111\rangle$	3	0	0	1/4!	3/3!/2	0	0	0	0
	$\langle 22211\rangle$	3	0	0	0	1/4!	3/3!/2	0	0	0
	$\langle 2222\rangle$	3	0	0	0	0	1/4!	3/3!/2	2/2!/4	0
	$\langle 311111\rangle$	3	0	0	0	0	0	0	0	1/4!
	$\langle 32111\rangle$	3	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\langle 3221\rangle$	3	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\langle 3311\rangle$	3	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\langle 332\rangle$	3	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\langle 41111\rangle$	3	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\langle 4211\rangle$	3	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\langle 422\rangle$	3	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\langle 431\rangle$	3	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\langle 44\rangle$	3	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\langle 71\rangle$	3	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\langle 8\rangle$	3	0	0	0	0	0	0	0	0
Result			0	0	0	0	0	0	0	0

表 25-12（その 2）

	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Function	$\langle 321^7 \rangle$	$\langle 3221^5 \rangle$	$\langle 32221^3 \rangle$	$\langle 32^41 \rangle$	$\langle 331^6 \rangle$	$\langle 3321^4 \rangle$	$\langle 332211 \rangle$	$\langle 33222 \rangle$	$\langle 3331^3 \rangle$
⟨ ⟩	72/9!/6	168/8!/12	140/7!/24	30/6!/48	28/8!/9	105/7!/18	90/6!/36	10/5!/72	20/6!/27
⟨1⟩	56/8!/6	105/7!/12	60/6!/24	5/5!/48	21/7!/9	60/6!/18	30/5!/36	0	10/5!/27
⟨11⟩	42/7!/6	60/6!/12	20/5!/24	0	15/6!/9	30/5!/18	6/4!/36	0	4/4!/27
⟨2⟩	8/8!/3	42/7!/6	60/6!/12	20/5!/24	0	15/6!/9	30/5!/18	6/4!/36	0
⟨111⟩	30/6!/6	30/5!/12	0	0	10/5!/9	12/4!/18	0	0	1/3!/27
⟨21⟩	7/7!/3	30/6!/6	30/5!/12	4/4!/24	0	10/5!/9	12/4!/18	0	0
⟨3⟩	8/8!/2	21/7!/4	20/6!/8	5/5!/16	7/7!/3	30/6!/6	30/5!/12	4/4!/24	10/5!/9
⟨1111⟩	20/5!/6	12/4!/12	0	0	6/4!/9	3/3!/18	0	0	0
⟨211⟩	6/6!/3	20/5!/6	12/4!/12	0	0	6/4!/9	3/3!/18	0	0
⟨22⟩	0	6/6!/3	20/5!/6	12/4!/12	0	0	6/4!/9	3/3!/18	0
⟨31⟩	7/7!/2	15/6!/4	10/5!/8	1/4!/16	6/6!/3	20/5!/6	12/4!/12	0	6/4!/9
⟨4⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨11111⟩	12/4!/6	3/3!/12	0	0	3/3!/9	0	0	0	0
⟨2111⟩	5/5!/3	12/4!/6	3/3!/12	0	0	3/3!/9	0	0	0
⟨221⟩	0	5/5!/3	12/4!/6	3/3!/12	0	0	3/3!/9	0	0
⟨311⟩	6/6!/2	10/5!/4	4/4!/8	0	5/5!/3	12/4!/6	3/3!/12	0	3/3!/9
⟨32⟩	1/7!	6/6!/2	10/5!/4	4/4!/8	0	5/5!/3	12/4!/6	3/3!/12	0
⟨41⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨111111⟩	6/3!/6	0	0	0	1/2!/9	0	0	0	0
⟨21111⟩	4/4!/3	6/3!/6	0	0	0	1/2!/9	0	0	0
⟨2211⟩	0	4/4!/3	6/3!/6	0	0	0	1/2!/9	0	0
⟨222⟩	0	0	4/4!/3	6/3!/6	0	0	0	1/2!/9	0
⟨3111⟩	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	0	4/4!/3	6/3!/6	0	0	1/2!/9
⟨321⟩	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	0	0	4/4!/3	6/3!/6	0
⟨33⟩	0	0	0	0	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	4/4!/3
⟨411⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨42⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨1111111⟩	2/2!/6	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨211111⟩	3/3!/3	2/2!/6	0	0	0	0	0	0	0
⟨22111⟩	0	3/3!/3	2/2!/6	0	0	0	0	0	0
⟨2221⟩	0	0	3/3!/3	2/2!/6	0	0	0	0	0
⟨31111⟩	4/4!/2	3/3!/4	0	0	3/3!/3	2/2!/6	0	0	0
⟨3211⟩	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	0	3/3!/3	2/2!/6	0	0
⟨322⟩	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	0	3/3!/3	2/2!/6	0
⟨331⟩	0	0	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	3/3!/3
⟨4111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨421⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨43⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨7⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨11111111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨2111111⟩	2/2!/3	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨221111⟩	0	2/2!/3	0	0	0	0	0	0	0
⟨22211⟩	0	0	2/2!/3	0	0	0	0	0	0
⟨2222⟩	0	0	0	2/2!/3	0	0	0	0	0
⟨311111⟩	3/3!/2	0	0	0	2/2!/3	0	0	0	0
⟨32111⟩	1/4!	0	1/2!/4	0	0	2/2!/3	0	0	0
⟨3221⟩	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	0	0	1/2!/3	0	0
⟨3311⟩	0	0	0	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	0	2/2!/3
⟨332⟩	0	0	0	0	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	0
⟨41111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨4211⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨422⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨431⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨44⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨71⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨8⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Result	0	0	0	0	0	0	0	0	0

表 25-12（その 3）

	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Function	$\langle 33321\rangle$	$\langle 3333\rangle$	$\langle 41^8\rangle$	$\langle 421^6\rangle$	$\langle 4221^4\rangle$	$\langle 422211\rangle$	$\langle 42222\rangle$	$\langle 431^5\rangle$	$\langle 432111\rangle$	$\langle 43221\rangle$
$\langle\,\rangle$	20/5!/54	1/4!/81	9/9!/4	56/8!/8	168/8!/16	60/6!/32	5/5!/64	42/7!/12	120/6!/24	60/5!/48
$\langle 1\rangle$	4/4!/54	0	8/8!/4	42/7!/8	60/6!/16	20/5!/32	0	30/6!/12	60/5!/24	12/4!/48
$\langle 11\rangle$	0	0	7/7!/4	30/6!/8	30/5!/16	4/4!/32	0	20/5!/12	24/4!/24	0
$\langle 2\rangle$	4/4!/27	0	0	7/7!/4	30/6!/8	30/5!/16	4/4!/32	0	20/5!/12	24/4!/24
$\langle 111\rangle$	0	0	6/6!/4	20/5!/8	12/4!/16	0	0	12/4!/12	6/3!/24	0
$\langle 21\rangle$	1/3!/27	0	0	6/6!/4	20/5!/8	12/4!/16	0	0	12/4!/12	6/3!/24
$\langle 3\rangle$	12/4!/18	1/3!/27	0	0	0	0	0	6/6!/4	20/5!/8	12/4!/16
$\langle 1111\rangle$	0	0	5/5!/4	12/4!/8	3/3!/16	0	0	6/3!/12	0	0
$\langle 211\rangle$	0	0	0	5/5!/4	12/4!/8	3/3!/16	0	0	6/3!/12	0
$\langle 22\rangle$	0	0	0	0	5/5!/4	12/4!/8	3/3!/16	0	0	6/3!/12
$\langle 31\rangle$	3/3!/18	0	0	0	0	0	0	5/5!/4	12/4!/8	3/3!/16
$\langle 4\rangle$	0	0	1/8!	7/7!/2	15/6!/4	10/5!/8	1/4!/16	6/6!/3	20/5!/6	12/4!/12
$\langle 11111\rangle$	0	0	4/4!/4	6/3!/8	0	0	0	2/2!/12	0	0
$\langle 2111\rangle$	0	0	0	4/4!/4	6/3!/8	0	0	0	2/2!/12	0
$\langle 221\rangle$	0	0	0	0	4/4!/4	6/3!/8	0	0	0	2/2!/12
$\langle 311\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	4/4!/4	6/3!/8	0
$\langle 32\rangle$	3/3!/9	0	0	0	0	0	0	0	4/4!/4	6/3!/8
$\langle 41\rangle$	0	0	1/7!	6/6!/2	10/5!/4	4/4!/8	0	5/5!/3	12/4!/6	3/3!/12
$\langle 111111\rangle$	0	0	3/3!/4	2/2!/8	0	0	0	0	0	0
$\langle 21111\rangle$	0	0	0	3/3!/4	2/2!/8	0	0	0	0	0
$\langle 2211\rangle$	0	0	0	0	3/3!/4	2/2!/8	0	0	0	0
$\langle 222\rangle$	0	0	0	0	0	3/3!/4	2/2!/8	0	0	0
$\langle 3111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	3/3!/4	2/2!/8	0
$\langle 321\rangle$	1/2!/9	0	0	0	0	0	0	0	3/3!/4	2/2!/8
$\langle 33\rangle$	6/3!/6	1/2!/9	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 411\rangle$	0	0	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	0	4/4!/3	6/3!/6	0
$\langle 42\rangle$	0	0	0	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	0	4/4!/3	6/3!/6
$\langle 1111111\rangle$	0	0	2/2!/4	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 211111\rangle$	0	0	0	2/2!/4	0	0	0	0	0	0
$\langle 22111\rangle$	0	0	0	0	2/2!/4	0	0	0	0	0
$\langle 2221\rangle$	0	0	0	0	0	2/2!/4	0	0	0	0
$\langle 31111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	2/2!/4	0	0
$\langle 3211\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	2/2!/4	0
$\langle 322\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2/2!/4
$\langle 331\rangle$	2/2!/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 4111\rangle$	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	0	3/3!/3	2/2!/6	0
$\langle 421\rangle$	0	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	0	3/3!/3	2/2!/6
$\langle 43\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4
$\langle 7\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 11111111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 2111111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 221111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 22211\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 2222\rangle$	0	0	0	0	0	0	1/1!/4	0	0	0
$\langle 311111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 32111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	1/1!/4	0
$\langle 3221\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/1!/4
$\langle 3311\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 332\rangle$	2/2!/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 41111\rangle$	0	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	0	0	2/2!/3	0	0
$\langle 4211\rangle$	0	0	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	0	0	2/2!/3	0
$\langle 422\rangle$	0	0	0	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	0	0	2/2!/3
$\langle 431\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4
$\langle 44\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 71\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 8\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Result	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

表 25-12（その 4）

	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
Function	$\langle 43311\rangle$	$\langle 4332\rangle$	$\langle 441^4\rangle$	$\langle 44211\rangle$	$\langle 4422\rangle$	$\langle 4431\rangle$	$\langle 444\rangle$	$\langle 71^5\rangle$	$\langle 721^3\rangle$	$\langle 7221\rangle$
$\langle\,\rangle$	30/5!/36	12/4!/72	15/6!/16	30/5!/32	6/4!/64	12/4!/48	1/3!/64	6/6!/7	20/5!/14	2/4!/28
$\langle 1\rangle$	12/4!/36	0	10/5!/16	12/4!/32	0	3/3!/48	0	5/5!/7	12/4!/14	3/3!/28
$\langle 11\rangle$	3/3!/36	0	6/4!/16	3/3!/32	0	0	0	4/4!/7	6/3!/14	0
$\langle 2\rangle$	0	3/3!/36	0	6/4!/16	3/3!/32	0	0	0	4/4!/7	6/3!/14
$\langle 111\rangle$	0	0	3/3!/16	0	0	0	0	3/3!/7	2/2!/14	0
$\langle 21\rangle$	0	0	0	3/3!/16	0	0	0	0	3/3!/7	2/2!/14
$\langle 3\rangle$	12/4!/12	6/3!/24	0	0	0	3/3!/16	0	0	0	0
$\langle 1111\rangle$	0	0	1/2!/16	0	0	0	0	2/2!/7	0	0
$\langle 211\rangle$	0	0	0	1/2!/16	0	0	0	0	2/2!/7	0
$\langle 22\rangle$	0	0	0	0	1/2!/16	0	0	0	0	2/2!/7
$\langle 31\rangle$	6/3!/12	0	0	0	0	1/2!/16	0	0	0	0
$\langle 4\rangle$	6/4!/9	3/3!/18	0	5/5!/4	12/4!/8	3/3!/16	6/3!/12	0	0	0
$\langle 11111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	1/1!/7	0	0
$\langle 2111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	1/1!/7	0
$\langle 221\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/1!/7
$\langle 311\rangle$	2/2!/12	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 32\rangle$	0	2/2!/12	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 41\rangle$	3/3!/9	0	0	4/4!/4	6/3!/8	0	2/2!/12	0	0	0
$\langle 111111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 21111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 2211\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 222\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 3111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 321\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 33\rangle$	3/3!/4	2/2!/8	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 411\rangle$	1/2!/9	0	3/3!/4	2/2!/8	0	0	0	0	0	0
$\langle 42\rangle$	0	1/2!/9	0	3/3!/4	2/2!/8	0	0	0	0	0
$\langle 1111111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 211111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 22111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 2221\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 31111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 3211\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 322\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 331\rangle$	2/2!/4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 4111\rangle$	0	0	2/2!/4	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 421\rangle$	0	0	0	2/2!/4	0	0	0	0	0	0
$\langle 43\rangle$	3/3!/3	2/2!/6	0	0	0	2/2!/4	0	0	0	0
$\langle 7\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4
$\langle 11111111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 2111111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 221111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 22211\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 2222\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 311111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 32111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 3221\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 3311\rangle$	1/1!/4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 332\rangle$	0	1/1!/4	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 41111\rangle$	0	0	1/1!/4	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 4211\rangle$	0	0	0	1/1!/4	0	0	0	0	0	0
$\langle 422\rangle$	0	0	0	0	1/1!/4	0	0	0	0	0
$\langle 431\rangle$	2/2!/3	0	0	0	0	1/1!/4	0	0	0	0
$\langle 44\rangle$	0	0	1/4!	3/3!/2	2/2!/4	2/2!/3	1/1!/4	0	0	0
$\langle 71\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4
$\langle 8\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Result	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

表 25-12（その 5）

	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
Function	⟨7311⟩	⟨732⟩	⟨741⟩	$\langle 81^4\rangle$	⟨8211⟩	⟨822⟩	⟨831⟩	⟨84⟩	⟨9111⟩	⟨921⟩	⟨93⟩
⟨ ⟩	12/4!/21	6/3!/42	6/3!/28	5/5!/8	12/4!/16	12/4!/32	6/3!/24	2/2!/32	4/4!/9	6/3!/18	2/2!/27
⟨1⟩	6/3!/21	0	2/2!/28	4/4!/8	6/3!/16	3/3!/32	2/2!/24	0	3/3!/9	2/2!/18	0
⟨11⟩	2/2!/21	0	0	3/3!/8	2/2!/16	0	0	0	2/2!/9	0	0
⟨2⟩	0	2/2!/21	0	0	3/3!/8	2/2!/16	0	0	0	2/2!/9	0
⟨111⟩	0	0	0	2/2!/8	0	0	0	0	1/1!/9	0	0
⟨21⟩	0	0	0	0	2/2!/8	0	0	0	0	1/1!/9	0
⟨3⟩	3/3!/7	2/2!/14	0	0	0	0	2/2!/8	0	0	0	1/1!/9
⟨1111⟩	0	0	0	1/1!/8	0	0	0	0	0	0	0
⟨211⟩	0	0	0	0	1/1!/8	0	0	0	0	0	0
⟨22⟩	0	0	0	0	0	1/1!/8	0	0	0	0	0
⟨31⟩	2/2!/7	0	0	0	0	0	1/1!/8	0	0	0	0
⟨4⟩	0	0	2/2!/7	0	0	0	0	1/1!/8	0	0	0
⟨11111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨2111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨221⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨311⟩	1/1!/7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨32⟩	0	1/1!/7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨41⟩	0	0	1/1!/7	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨111111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨21111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨2211⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨222⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨3111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨321⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨33⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨411⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨42⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨1111111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨211111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨22111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨2221⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨31111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨3211⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨322⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨331⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨4111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨421⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨43⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨7⟩	3/3!/3	2/2!/6	2/2!/4	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨11111111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨2111111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨221111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨22211⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨2222⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨311111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨32111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨3221⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨3311⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨332⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨41111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨4211⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨422⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨431⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨44⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨71⟩	2/2!/3	0	1/1!/4	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨8⟩	0	0	0	1/4!	3/3!/2	1/2!/4	2/2!/3	1/1!/4	0	0	0
Result	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

9.18　表 25-13

（その 1）

Weight 13, 3rd Stratum			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Weight	Function	Stratum	$\langle 1^{13} \rangle$	$\langle 21^{11} \rangle$	$\langle 221^{9} \rangle$	$\langle 2221^{7} \rangle$	$\langle 22221^{5} \rangle$	$\langle 2^{5}111 \rangle$	$\langle 2^{6}1 \rangle$	$\langle 31^{10} \rangle$	$\langle 321^{8} \rangle$	$\langle 3221^{6} \rangle$
0	$\langle \, \rangle$	9	1/13!	12/12!/2	55/11!/4	120/10!/8	126/9!/16	56/8!/32	7/7!/64	11/11!/3	90/10!/6	252/9!/12
1	$\langle 1 \rangle$	8	1/12!	11/11!/2	45/10!/4	84/9!/8	70/8!/16	21/7!/32	1/6!/64	10/10!/3	72/9!/6	168/8!/12
2	$\langle 11 \rangle$	7	1/11!	10/10!/2	36/9!/4	56/8!/8	35/7!/16	6/6!/32	0	9/9!/3	56/8!/6	105/7!/12
2	$\langle 2 \rangle$	7	0	1/11!	10/10!/2	36/9!/4	56/8!/8	35/7!/16	6/6!/32	0	9/9!/3	56/8!/6
3	$\langle 111 \rangle$	6	1/10!	9/9!/2	28/8!/4	35/7!/8	15/6!/16	1/5!/32	0	8/8!/3	42/7!/6	60/6!/12
3	$\langle 21 \rangle$	6	0	1/10!	9/9!/2	28/8!/4	35/7!/8	15/6!/16	1/5!/32	0	8/8!/3	42/7!/6
3	$\langle 3 \rangle$	6	0	0	0	0	0	0	0	1/10!	9/9!/2	28/8!/4
4	$\langle 1111 \rangle$	5	1/9!	8/8!/2	21/7!/4	20/6!/8	5/5!/16	0	0	7/7!/3	30/6!/6	30/5!/12
4	$\langle 211 \rangle$	5	0	1/9!	8/8!/2	21/7!/4	20/6!/8	5/5!/16	0	0	7/7!/3	30/6!/6
4	$\langle 22 \rangle$	5	0	0	1/9!	8/8!/2	21/7!/4	20/6!/8	5/5!/16	0	0	7/7!/3
4	$\langle 31 \rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	1/9!	8/8!/2	21/7!/4
4	$\langle 4 \rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	$\langle 11111 \rangle$	5	1/8!	7/7!/2	15/6!/4	10/5!/8	1/4!/16	0	0	6/6!/3	20/5!/6	12/4!/12
5	$\langle 2111 \rangle$	5	0	1/8!	7/7!/2	15/6!/4	10/5!/8	1/4!/16	0	0	6/6!/3	20/5!/6
5	$\langle 221 \rangle$	5	0	0	1/8!	7/7!/2	15/6!/4	10/5!/8	1/4!/16	0	0	6/6!/3
5	$\langle 311 \rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	1/8!	7/7!/2	15/6!/4
5	$\langle 32 \rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0	1/8!	7/7!/2
5	$\langle 41 \rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	$\langle 111111 \rangle$	5	1/7!	6/6!/2	10/5!/4	4/4!/8	0	0	0	5/5!/3	12/4!/6	3/3!/12
6	$\langle 21111 \rangle$	5	0	1/7!	6/6!/2	10/5!/4	4/4!/8	0	0	0	5/5!/3	12/4!/6
6	$\langle 2211 \rangle$	5	0	0	1/7!	6/6!/2	10/5!/4	4/4!/8	0	0	0	5/5!/3
6	$\langle 222 \rangle$	5	0	0	0	1/7!	6/6!/2	10/5!/4	4/4!/8	0	0	0
6	$\langle 3111 \rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	1/7!	6/6!/2	10/5!/4
6	$\langle 321 \rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0	1/7!	6/6!/2
6	$\langle 33 \rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	$\langle 411 \rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	$\langle 42 \rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	$\langle 1111111 \rangle$	5	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	0	0	0	4/4!/3	6/3!/6	0
7	$\langle 211111 \rangle$	5	0	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	0	0	0	4/4!/3	6/3!/6
7	$\langle 22111 \rangle$	5	0	0	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	0	0	0	4/4!/3
7	$\langle 2221 \rangle$	5	0	0	0	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	0	0	0
7	$\langle 31111 \rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	1/6!	5/5!/2	6/4!/4
7	$\langle 3211 \rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6!	5/5!/2
7	$\langle 322 \rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6!
7	$\langle 331 \rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	$\langle 4111 \rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	$\langle 421 \rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	$\langle 43 \rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	$\langle 7 \rangle$	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	$\langle 11111111 \rangle$	$4, \langle 8 \rangle, -120$	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	0	0	0	3/3!/3	2/2!/6	0
8	$\langle 2111111 \rangle$	$4, \langle 8 \rangle, 40$	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	0	0	0	3/3!/3	2/2!/6
8	$\langle 221111 \rangle$	$4, \langle 8 \rangle, -8$	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	0	0	0	3/3!/3
8	$\langle 22211 \rangle$	4	0	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	0	0	0
8	$\langle 2222 \rangle$	4	0	0	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	0	0
8	$\langle 311111 \rangle$	$4, \langle 8 \rangle, -15$	0	0	0	0	0	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4
8	$\langle 32111 \rangle$	$4, \langle 8 \rangle, 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	1/5!	4/4!/2
8	$\langle 3221 \rangle$	$4, \langle 8 \rangle, 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/5!
8	$\langle 3311 \rangle$	$4, \langle 8 \rangle, 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	$\langle 332 \rangle$	$4, \langle 8 \rangle, -2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	$\langle 41111 \rangle$	$4, \langle 8 \rangle, 4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	$\langle 4211 \rangle$	$4, \langle 8 \rangle, 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	$\langle 422 \rangle$	$4, \langle 8 \rangle, 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	$\langle 431 \rangle$	$4, \langle 8 \rangle, 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	$\langle 44 \rangle$	$4, \langle 8 \rangle, -2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	$\langle 71 \rangle$	$4, \langle 8 \rangle, -1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	$\langle 8 \rangle$	$4, \langle 8 \rangle, 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	$\langle 1^{10} \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, -225$	1/3!	2/2!/2	0	0	0	0	0	1/1!/3	0	0
10	$\langle 21^{8} \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, 55$	0	1/3!	2/2!/2	0	0	0	0	0	1/1!/3	0
10	$\langle 221^{6} \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, -5$	0	0	1/3!	2/2!/2	0	0	0	0	0	1/1!/3
10	$\langle 2221^{4} \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, 3$	0	0	0	1/3!	2/2!/2	0	0	0	0	0
10	$\langle 222211 \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, -9$	0	0	0	0	1/3!	2/2!/2	0	0	0	0
10	$\langle 22222 \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, 15$	0	0	0	0	0	1/3!	2/2!/2	0	0	0
10	$\langle 31^{7} \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, -15$	0	0	0	0	0	0	0	1/3!	2/2!/2	0
10	$\langle 3211111 \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, -5$	0	0	0	0	0	0	0	0	1/3!	2/2!/2
10	$\langle 322111 \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/3!
10	$\langle 32221 \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, 3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	$\langle 331111 \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, 6$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	$\langle 33211 \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, -2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	$\langle 3322 \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, -2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	$\langle 3331 \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	$\langle 41^{6} \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, 5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	$\langle 421111 \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	$\langle 42211 \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	$\langle 4222 \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, -3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	$\langle 43111 \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, -1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	$\langle 4321 \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	$\langle 433 \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, 2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	$\langle 4411 \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, -1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	$\langle 442 \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, -1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	$\langle 7111 \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, -1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	$\langle 721 \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, -1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	$\langle 73 \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, -1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	$\langle 811 \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	$\langle 82 \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	$\langle 91 \rangle$	$4, \langle 91 \rangle, 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Result			−3575	825	−155	45	−15	−15	45	−125	−15	−5

表 25-13（その 2）

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Function	$\langle 32221^4\rangle$	$\langle 32^411\rangle$	$\langle 32^5\rangle$	$\langle 331^7\rangle$	$\langle 3321^5\rangle$	$\langle 3322111\rangle$	$\langle 332221\rangle$	$\langle 3331^4\rangle$	$\langle 333211\rangle$	$\langle 33322\rangle$	$\langle 33331\rangle$	$\langle 41^9\rangle$	$\langle 421^7\rangle$	$\langle 4221^5\rangle$
$\langle\,\rangle$	280/8!/24	105/7!/48	6/6!/96	36/9!/9	168/8!/18	210/7!/36	60/6!/72	35/7!/27	60/6!/54	10/5!/108	5/5!/81	10/10!/4	72/9!/8	168/8!/16
$\langle 1\rangle$	140/7!/24	30/6!/48	0	28/8!/9	105/7!/18	90/6!/36	10/5!/72	20/6!/27	20/5!/54	0	1/4!/81	9/9!/4	56/8!/8	105/7!/16
$\langle 11\rangle$	60/6!/24	5/5!/48	0	21/7!/9	60/6!/18	30/5!/36	0	10/5!/27	4/4!/54	0	0	8/8!/4	42/7!/8	60/6!/16
$\langle 2\rangle$	105/7!/12	60/6!/24	5/5!/48	0	21/7!/9	60/6!/18	30/5!/36	0	10/5!/27	4/4!/54	0	0	8/8!/4	42/7!/8
$\langle 111\rangle$	20/5!/24	0	0	15/6!/9	30/5!/18	6/4!/36	0	4/4!/27	0	0	0	7/7!/4	30/6!/8	30/5!/16
$\langle 21\rangle$	60/6!/12	20/5!/24	0	0	15/6!/9	30/5!/18	6/4!/36	0	4/4!/27	0	0	0	7/7!/4	30/6!/8
$\langle 3\rangle$	35/7!/8	15/6!/16	1/5!/32	8/8!/3	42/7!/6	60/6!/12	20/5!/24	15/6!/9	30/5!/18	6/4!/36	4/4!/27	0	0	0
$\langle 1111\rangle$	4/4!/24	0	0	10/5!/9	12/4!/18	0	0	1/3!/27	0	0	0	6/6!/4	20/5!/8	12/4!/16
$\langle 211\rangle$	30/5!/12	4/4!/24	0	0	10/5!/9	12/4!/18	0	0	1/3!/27	0	0	0	6/6!/4	20/5!/8
$\langle 22\rangle$	30/6!/6	30/5!/12	4/4!/24	0	0	10/5!/9	12/4!/18	0	0	1/3!/27	0	0	0	6/6!/4
$\langle 31\rangle$	20/6!/8	5/5!/16	0	7/7!/3	30/6!/6	30/5!/12	4/4!/24	10/5!/9	12/4!/18	0	1/3!/27	0	0	0
$\langle 4\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/9!	8/8!/2	21/7!/4
$\langle 11111\rangle$	0	0	0	6/4!/9	3/3!/18	0	0	0	0	0	0	5/5!/4	12/4!/8	3/3!/16
$\langle 2111\rangle$	12/4!/12	0	0	0	6/4!/9	3/3!/18	0	0	0	0	0	0	5/5!/4	12/4!/8
$\langle 221\rangle$	20/5!/6	12/4!/12	0	0	0	6/4!/9	3/3!/18	0	0	0	0	0	0	5/5!/4
$\langle 311\rangle$	10/5!/8	1/4!/16	0	6/6!/3	20/5!/6	12/4!/12	0	6/4!/9	3/3!/18	0	0	0	0	0
$\langle 32\rangle$	15/6!/4	10/5!/8	1/4!/16	0	6/6!/3	20/5!/6	12/4!/12	0	6/4!/9	3/3!/18	0	0	0	0
$\langle 41\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/8!	7/7!/2	15/6!/4
$\langle 111111\rangle$	0	0	0	3/3!/9	0	0	0	0	0	0	0	4/4!/4	6/3!/8	0
$\langle 21111\rangle$	3/3!/12	0	0	0	3/3!/9	0	0	0	0	0	0	0	4/4!/4	6/3!/8
$\langle 2211\rangle$	12/4!/6	3/3!/12	0	0	0	3/3!/9	0	0	0	0	0	0	0	4/4!/4
$\langle 222\rangle$	5/5!/3	12/4!/6	3/3!/12	0	0	0	3/3!/9	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 3111\rangle$	4/4!/8	0	0	5/5!/3	12/4!/6	3/3!/12	0	3/3!/9	0	0	0	0	0	0
$\langle 321\rangle$	10/5!/4	4/4!/8	0	0	5/5!/3	12/4!/6	3/3!/12	0	3/3!/9	0	0	0	0	0
$\langle 33\rangle$	0	0	0	1/7!	6/6!/2	10/5!/4	4/4!/8	5/5!/3	12/4!/6	3/3!/12	3/3!/9	0	0	0
$\langle 411\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/7!	6/6!/2	10/5!/4
$\langle 42\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/7!	6/6!/2
$\langle 1111111\rangle$	0	0	0	1/2!/9	0	0	0	0	0	0	0	3/3!/4	2/2!/8	0
$\langle 211111\rangle$	0	0	0	0	1/2!/9	0	0	0	0	0	0	0	3/3!/4	2/2!/8
$\langle 22111\rangle$	6/3!/6	0	0	0	0	1/2!/9	0	0	0	0	0	0	0	3/3!/4
$\langle 2221\rangle$	4/4!/3	6/3!/6	0	0	0	0	1/2!/9	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 31111\rangle$	1/3!/8	0	0	4/4!/3	6/3!/6	0	0	1/2!/9	0	0	0	0	0	0
$\langle 3211\rangle$	6/4!/4	1/3!/8	0	0	4/4!/3	6/3!/6	0	0	1/2!/9	0	0	0	0	0
$\langle 322\rangle$	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	0	0	4/4!/3	6/3!/6	0	0	1/2!/9	0	0	0	0
$\langle 331\rangle$	0	0	0	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	4/4!/3	6/3!/6	0	1/2!/9	0	0	0
$\langle 4111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6!	5/5!/2	6/4!/4
$\langle 421\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6!	5/5!/2
$\langle 43\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 7\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 11111111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2/2!/4	0	0
$\langle 2111111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2/2!/4	0
$\langle 221111\rangle$	2/2!/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2/2!/4
$\langle 22211\rangle$	3/3!/3	2/2!/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 2222\rangle$	0	3/3!/3	2/2!/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 311111\rangle$	0	0	0	3/3!/3	2/2!/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 32111\rangle$	3/3!/4	0	0	0	3/3!/3	2/2!/6	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 3221\rangle$	4/4!/2	3/3!/4	0	0	0	3/3!/3	2/2!/6	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 3311\rangle$	0	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	3/3!/3	2/2!/6	0	0	0	0	0
$\langle 332\rangle$	0	0	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	3/3!/3	2/2!/6	0	0	0	0
$\langle 41111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4
$\langle 4211\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/5!	4/4!/2
$\langle 422\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/5!
$\langle 431\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 44\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 71\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 8\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 1^{10}\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 21^8\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 221^6\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 2221^4\rangle$	1/1!/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 222211\rangle$	0	1/1!/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 22222\rangle$	0	0	1/1!/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 31^7\rangle$	0	0	0	1/1!/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 3211111\rangle$	0	0	0	0	1/1!/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 322111\rangle$	2/2!/2	0	0	0	0	1/1!/3	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 32221\rangle$	1/3!	2/2!/2	0	0	0	0	1/1!/3	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 331111\rangle$	0	0	0	1/3!	2/2!/2	0	0	1/1!/3	0	0	0	0	0	0
$\langle 33211\rangle$	0	0	0	0	1/3!	2/2!/2	0	0	1/1!/3	0	0	0	0	0
$\langle 3322\rangle$	0	0	0	0	0	1/3!	2/2!/2	0	0	1/1!/3	0	0	0	0
$\langle 3331\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	1/3!	2/2!/2	0	1/1!/3	0	0	0
$\langle 41^6\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/3!	2/2!/2	0
$\langle 421111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/3!	2/2!/2
$\langle 42211\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/3!
$\langle 4222\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 43111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 4321\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 433\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 4411\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 442\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 7111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 721\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 73\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 811\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 82\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 91\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Result	9	3	−15	40	0	−8	0	−2	6	−2	−8	15	15	−5

表 25-13（その 3）

	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
Function	⟨4222111⟩	⟨422221⟩	$\langle 431^6\rangle$	⟨4321111⟩	⟨432211⟩	⟨43222⟩	⟨433111⟩	⟨43321⟩	⟨4333⟩	$\langle 441^5\rangle$	⟨442111⟩	⟨44221⟩	⟨44311⟩
⟨ ⟩	140/7!/32	30/6!/64	56/8!/12	210/7!/24	180/6!/48	20/5!/96	60/6!/36	60/5!/72	4/4!/108	21/7!/16	60/6!/32	30/5!/64	30/5!/48
⟨1⟩	60/6!/32	5/5!/64	42/7!/12	120/6!/24	60/5!/48	0	30/5!/36	12/4!/72	0	15/6!/16	30/5!/32	6/4!/64	12/4!/48
⟨11⟩	20/5!/32	0	30/6!/12	60/5!/24	12/4!/48	0	12/4!/36	0	0	10/5!/16	12/4!/32	0	3/3!/48
⟨2⟩	60/6!/16	20/5!/32	0	30/6!/12	60/5!/24	12/4!/48	0	12/4!/36	0	0	10/5!/16	12/4!/32	0
⟨111⟩	4/4!/32	0	20/5!/12	24/4!/24	0	0	3/3!/36	0	0	6/4!/16	3/3!/32	0	0
⟨21⟩	30/5!/16	4/4!/32	0	20/5!/12	24/4!/24	0	0	3/3!/36	0	0	6/4!/16	3/3!/32	0
⟨3⟩	0	0	7/7!/4	30/6!/8	30/5!/16	4/4!/32	20/5!/12	24/4!/24	3/3!/36	0	0	0	6/4!/16
⟨1111⟩	0	0	12/4!/12	6/3!/24	0	0	0	0	0	3/3!/16	0	0	0
⟨211⟩	12/4!/16	0	0	12/4!/12	6/3!/24	0	0	0	0	0	3/3!/16	0	0
⟨22⟩	20/5!/8	12/4!/16	0	0	12/4!/12	6/3!/24	0	0	0	0	0	3/3!/16	0
⟨31⟩	0	0	6/6!/4	20/5!/8	12/4!/16	0	12/4!/12	6/3!/24	0	0	0	0	3/3!/16
⟨4⟩	20/6!/8	5/5!/16	7/7!/3	30/6!/6	30/5!/12	4/4!/24	10/5!/9	12/4!/18	1/3!/27	6/6!/4	20/5!/8	12/4!/16	12/4!/12
⟨11111⟩	0	0	6/3!/12	0	0	0	0	0	0	1/2!/16	0	0	0
⟨2111⟩	3/3!/16	0	0	6/3!/12	0	0	0	0	0	0	1/2!/16	0	0
⟨221⟩	12/4!/8	3/3!/16	0	0	6/3!/12	0	0	0	0	0	0	1/2!/16	0
⟨311⟩	0	0	5/5!/4	12/4!/8	3/3!/16	0	6/3!/12	0	0	0	0	0	1/2!/16
⟨32⟩	0	0	0	5/5!/4	12/4!/8	3/3!/16	0	6/3!/12	0	0	0	0	0
⟨41⟩	10/5!/8	1/4!/16	6/6!/3	20/5!/6	12/4!/12	0	6/4!/9	3/3!/18	0	5/5!/4	12/4!/8	3/3!/16	6/3!/12
⟨111111⟩	0	0	2/2!/12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨21111⟩	0	0	0	2/2!/12	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨2211⟩	6/3!/8	0	0	0	2/2!/12	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨222⟩	4/4!/4	6/3!/8	0	0	0	2/2!/12	0	0	0	0	0	0	0
⟨3111⟩	0	0	4/4!/4	6/3!/8	0	0	2/2!/12	0	0	0	0	0	0
⟨321⟩	0	0	0	4/4!/4	6/3!/8	0	0	2/2!/12	0	0	0	0	0
⟨33⟩	0	0	0	0	0	0	4/4!/4	6/3!/8	2/2!/12	0	0	0	0
⟨411⟩	4/4!/8	0	5/5!/3	12/4!/6	3/3!/12	0	3/3!/9	0	0	4/4!/4	6/3!/8	0	2/2!/12
⟨42⟩	10/5!/4	4/4!/8	0	5/5!/3	12/4!/6	3/3!/12	0	3/3!/9	0	0	4/4!/4	6/3!/8	0
⟨1111111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨211111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨22111⟩	2/2!/8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨2221⟩	3/3!/4	2/2!/8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨31111⟩	0	0	3/3!/4	2/2!/8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨3211⟩	0	0	0	3/3!/4	2/2!/8	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨322⟩	0	0	0	0	3/3!/4	2/2!/8	0	0	0	0	0	0	0
⟨331⟩	0	0	0	0	0	0	3/3!/4	2/2!/8	0	0	0	0	0
⟨4111⟩	1/3!/8	0	4/4!/3	6/3!/6	0	0	1/2!/9	0	0	3/3!/4	2/2!/8	0	0
⟨421⟩	6/4!/4	1/3!/8	0	4/4!/3	6/3!/6	0	0	1/2!/9	0	0	3/3!/4	2/2!/8	0
⟨43⟩	0	0	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	4/4!/3	6/3!/6	1/2!/9	0	0	0	3/3!/4
⟨7⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨11111111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨2111111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨221111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨22211⟩	2/2!/4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨2222⟩	0	2/2!/4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨311111⟩	0	0	2/2!/4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨32111⟩	0	0	0	2/2!/4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨3221⟩	0	0	0	0	2/2!/4	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨3311⟩	0	0	0	0	0	0	2/2!/4	0	0	0	0	0	0
⟨332⟩	0	0	0	0	0	0	0	2/2!/4	0	0	0	0	0
⟨41111⟩	0	0	3/3!/3	2/2!/6	0	0	0	0	0	2/2!/4	0	0	0
⟨4211⟩	3/3!/4	0	0	3/3!/3	2/2!/6	0	0	0	0	0	2/2!/4	0	0
⟨422⟩	4/4!/2	3/3!/4	0	0	3/3!/3	2/2!/6	0	0	0	0	0	2/2!/4	0
⟨431⟩	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	3/3!/3	2/2!/6	0	0	0	0	2/2!/4
⟨44⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	3/3!/3
⟨71⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨8⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 1^{10}\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 21^8\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 221^6\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 2221^4\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨222211⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨22222⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 31^7\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨3211111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨322111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨32221⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨331111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨33211⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨3322⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨3331⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 41^6\rangle$	0	0	1/1!/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨421111⟩	0	0	0	1/1!/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨42211⟩	2/2!/2	0	0	0	1/1!/3	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨4222⟩	1/3!	2/2!/2	0	0	0	1/1!/3	0	0	0	0	0	0	0
⟨43111⟩	0	0	1/3!	2/2!/2	0	0	1/1!/3	0	0	0	0	0	0
⟨4321⟩	0	0	0	1/3!	2/2!/2	0	0	1/1!/3	0	0	0	0	0
⟨433⟩	0	0	0	0	0	0	1/3!	2/2!/2	1/1!/3	0	0	0	0
⟨4411⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/3!	2/2!/2	0	1/1!/3
⟨442⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/3!	2/2!/2	0
⟨7111⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨721⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨73⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨811⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨82⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⟨91⟩	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Result	3	−9	−15	3	1	3	0	0	6	5	−3	1	−1

表 25-13（その 4）

	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
Function	$\langle 4432\rangle$	$\langle 4441\rangle$	$\langle 71^6\rangle$	$\langle 721^4\rangle$	$\langle 72211\rangle$	$\langle 7222\rangle$	$\langle 73111\rangle$	$\langle 7321\rangle$	$\langle 733\rangle$	$\langle 7411\rangle$	$\langle 742\rangle$	$\langle 81^5\rangle$	$\langle 82111\rangle$	$\langle 8221\rangle$
$\langle\,\rangle$	12/4!/96	4/4!/64	7/7!/7	30/6!/14	30/5!/28	4/4!/56	20/5!/21	24/4!/42	3/3!/63	12/4!/28	6/3!/56	6/6!/8	20/5!/16	12/4!/32
$\langle 1\rangle$	0	1/3!/64	6/6!/7	20/5!/14	12/4!/28	0	12/4!/21	6/3!/42	0	6/3!/28	0	5/5!/8	12/4!/16	3/3!/32
$\langle 11\rangle$	0	0	5/5!/7	12/4!/14	3/3!/28	0	6/3!/21	0	0	2/2!/28	0	4/4!/8	6/3!/16	0
$\langle 2\rangle$	3/3!/48	0	0	5/5!/7	12/4!/14	3/3!/28	0	6/3!/21	0	0	2/2!/28	0	4/4!/8	6/3!/16
$\langle 111\rangle$	0	0	4/4!/7	6/3!/14	0	0	2/2!/21	0	0	0	0	3/3!/8	2/2!/16	0
$\langle 21\rangle$	0	0	0	4/4!/7	6/3!/14	0	0	2/2!/21	0	0	0	0	3/3!/8	2/2!/16
$\langle 3\rangle$	3/3!/32	0	0	0	0	0	4/4!/7	6/3!/14	2/2!/21	0	0	0	0	0
$\langle 1111\rangle$	0	0	3/3!/7	2/2!/14	0	0	0	0	0	0	0	2/2!/8	0	0
$\langle 211\rangle$	0	0	0	3/3!/7	2/2!/14	0	0	0	0	0	0	0	2/2!/8	0
$\langle 22\rangle$	0	0	0	0	3/3!/7	2/2!/14	0	0	0	0	0	0	0	2/2!/8
$\langle 31\rangle$	0	0	0	0	0	0	3/3!/7	2/2!/14	0	0	0	0	0	0
$\langle 4\rangle$	6/3!/24	3/3!/16	0	0	0	0	0	0	0	3/3!/7	2/2!/14	0	0	0
$\langle 11111\rangle$	0	0	2/2!/7	0	0	0	0	0	0	0	0	1/1!/8	0	0
$\langle 2111\rangle$	0	0	0	2/2!/7	0	0	0	0	0	0	0	0	1/1!/8	0
$\langle 221\rangle$	0	0	0	0	2/2!/7	0	0	0	0	0	0	0	0	1/1!/8
$\langle 311\rangle$	0	0	0	0	0	0	2/2!/7	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 32\rangle$	1/2!/16	0	0	0	0	0	0	2/2!/7	0	0	0	0	0	0
$\langle 41\rangle$	0	1/2!/16	0	0	0	0	0	0	0	2/2!/7	0	0	0	0
$\langle 111111\rangle$	0	0	1/1!/7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 21111\rangle$	0	0	0	1/1!/7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 2211\rangle$	0	0	0	0	1/1!/7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 222\rangle$	0	0	0	0	0	1/1!/7	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 3111\rangle$	0	0	0	0	0	0	1/1!/7	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 321\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	1/1!/7	0	0	0	0	0	0
$\langle 33\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	1/1!/7	0	0	0	0	0
$\langle 411\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/1!/7	0	0	0	0
$\langle 42\rangle$	2/2!/12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/1!/7	0	0	0
$\langle 1111111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 211111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 22111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 2221\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 31111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 3211\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 322\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 331\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 4111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 421\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 43\rangle$	2/2!/8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 7\rangle$	0	0	1/6!	5/5!/2	6/4!/4	1/3!/8	4/4!/3	6/3!/6	1/2!/9	3/3!/4	2/2!/8	0	0	0
$\langle 11111111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 2111111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 221111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 22211\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 2222\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 311111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 32111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 3221\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 3311\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 332\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 41111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 4211\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 422\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 431\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 44\rangle$	2/2!/6	2/2!/4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 71\rangle$	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4	0	3/3!/3	2/2!/6	0	2/2!/4	0	0	0	0
$\langle 8\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/5!	4/4!/2	3/3!/4
$\langle 1^{10}\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 21^8\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 221^6\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 2221^4\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 222211\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 22222\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 31^7\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 3211111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 322111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 32221\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 331111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 33211\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 3322\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 3331\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 41^6\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 421111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 42211\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 4222\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 43111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 4321\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 433\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 4411\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 442\rangle$	1/1!/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 7111\rangle$	0	0	1/3!	2/2!/2	0	0	1/1!/3	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 721\rangle$	0	0	0	1/3!	2/2!/2	0	0	1/1!/3	0	0	0	0	0	0
$\langle 73\rangle$	0	0	0	0	0	0	1/3!	2/2!/2	1/1!/3	0	0	0	0	0
$\langle 811\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/3!	2/2!/2	0
$\langle 82\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/3!	2/2!/2
$\langle 91\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Result	−3	3	−5	−1	−1	3	1	−1	−2	1	1	5	1	1

表 25-13（その 5）

	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Function	$\langle 8311\rangle$	$\langle 832\rangle$	$\langle 841\rangle$	$\langle 91111\rangle$	$\langle 9211\rangle$	$\langle 922\rangle$	$\langle 931\rangle$	$\langle 94\rangle$	$\langle 13\rangle$
$\langle\,\rangle$	12/4!/24	6/3!/48	6/3!/32	5/5!/9	12/4!/18	3/3!/36	6/3!/27	2/2!/36	1/1!/13
$\langle 1\rangle$	6/3!/24	0	2/2!/32	4/4!/9	6/3!/18	0	2/2!/27	0	0
$\langle 11\rangle$	2/2!/24	0	0	3/3!/9	2/2!/18	0	0	0	0
$\langle 2\rangle$	0	2/2!/24	0	0	3/3!/9	2/2!/18	0	0	0
$\langle 111\rangle$	0	0	0	2/2!/9	0	0	0	0	0
$\langle 21\rangle$	0	0	0	0	2/2!/9	0	0	0	0
$\langle 3\rangle$	3/3!/8	2/2!/16	0	0	0	0	2/2!/9	0	0
$\langle 1111\rangle$	0	0	0	1/1!/9	0	0	0	0	0
$\langle 211\rangle$	0	0	0	0	1/1!/9	0	0	0	0
$\langle 22\rangle$	0	0	0	0	0	1/1!/9	0	0	0
$\langle 31\rangle$	2/2!/8	0	0	0	0	0	1/1!/9	0	0
$\langle 4\rangle$	0	0	2/2!/8	0	0	0	0	1/1!/9	0
$\langle 11111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 2111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 221\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 311\rangle$	1/1!/8	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 32\rangle$	0	1/1!/8	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 41\rangle$	0	0	1/1!/8	0	0	0	0	0	0
$\langle 111111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 21111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 2211\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 222\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 3111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 321\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 33\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 411\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 42\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 1111111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 211111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 22111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 2221\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 31111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 3211\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 322\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 331\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 4111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 421\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 43\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 7\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 11111111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 2111111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 221111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 22211\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 2222\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 311111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 32111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 3221\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 3311\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 332\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 41111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 4211\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 422\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 431\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 44\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 71\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 8\rangle$	3/3!/3	2/2!/6	2/2!/4	0	0	0	0	0	0
$\langle 1^{10}\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 21^{8}\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 221^{6}\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 2221^{4}\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 222211\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 22222\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 31^{7}\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 3211111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 322111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 32221\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 331111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 33211\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 3322\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 3331\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 41^{6}\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 421111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 42211\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 4222\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 43111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 4321\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 433\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 4411\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 442\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 7111\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 721\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 73\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 811\rangle$	1/1!/3	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 82\rangle$	0	1/1!/3	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 91\rangle$	0	0	0	1/3!	2/2!/2	0	1/1!/3	0	0
Result	−1	1	−1	−2	0	−2	1	0	0

References

[ACGH] Arbarello, E., Cornalba, M., Griffiths, P.A. and Harris, J., Geometry of algebraic curves, , Vol. 1, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **267** Springer, Berlin, (1984)

[Ba] Baker, H.F., *Abelian functions — Abel's theorem and the allied theory including the theory of the theta functions* —, Cambridge Univ. Press, (1897; reprint, 1995)

[BEL1] V.M. Buchstaber, V.Z. Enolskii and D.V. Leykin, Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications, *Reviews in Math. and Math. Physics* , **10** (1) 997 1–125

[BEL2] V.M. Buchstaber, V.Z. Enolskii, and D.V. Leykin, Rational analogs of Abelian functions, *Functional Anal. Appl.* , **33** (1999) 83–94

[EEMOP] J.C. Eilbeck, V.Z. Enolskii, S. Matsutani, Y. Ônishi, and E. Previato, Abelain functions for trigonal curves of genus three, *Int. Math. Res. Notices* , ( )

[FK1] H.M. Farkas and I. Kra, *Riemann Surfaces*, , 1st ed., Grad. Texts in Math. **71** (1980) S, pringer-Verlag

[FK2] H.M. Farkas and I. Kra, *Riemann Surfaces*, , 2nd ed., Grad. Texts in Math. **71** (1992) Springer-Verlag,

[Fr] G. Frobenius, Über die Grundlagen der Theorie der Jacobischen Functionen, *J. Reine Angew. Math.*, **97** (1884) 188–223

[L] S. Lang, *Introduction to algebraic and Abelian functions*, , 2nd ed., Grad. Texts in Math. **89** (1982) Springer-Verlag,

[Mac] I.G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, (1995) Clarendon Press, Oxford,

[Mu] D. Mumford, *Tata lectures on Theta I*, , Progr. Math., **28** (1983) Birkhäuser,

[N] A. Nakayashiki, On algebraic expressions of sigma for (n, s) curves, (2008) preprint,

[Ô1] Y. Ônishi, Complex multiplication formulae for curves of genus three, (1998) **21** 381–431 *Tokyo J. Math.*,

[Ô2] Y. Ônishi, 353-364 Determinant expressions for Abelian functions in genus two, (2002) **44** *Glasgow Math. J.* ,

[Ô3] Y. Ônishi, 299-312 Determinant expressions for hyperelliptic functions in genus three, (2004) **27** *Tokyo J. Math.* ,

[Ô4] Y. Ônishi, 705-742 Determinant expressions for hyperelliptic functions (with an appendix by Shigeki Matsutani), (2005) **48** *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, [Ô5] Y. Ônishi, Abelian functions for trigonal curves of degree four and determinantal formulae in purely trigonal case, (2005) http://arxiv.org/abs/math.NT/0503696,