

志村・谷山著 『近代的整数論』 に挙げられてゐる Hecke の例の具体例*

Yoshihiro Ônishi

はじめに

志村・谷山著「近代的整数論」([ST1]) 第 4 章, p.110-111, 例 2 c), 及び p.157-158, 例 2 では¹ Hecke の論文で調べられた場合について, 述べられてゐる. そこでは 2 次元の Abel 多様体でその虚数乗法を非 Galois な 4 次体に持つものについて, 類方程式の既約性の類似が成り立つことが示されてゐる. ここではより踏み込んで, 種数 2 の代数曲線でその Jacobi 多様体が Hecke の例を与へる様なものを, Florian Bouyer, Marco Streng [BS] に挙げられた例に基づいて, 具体的に構成してみる. 尚, これは織田孝幸氏の助言で始めた計算である. J.C.Eilbeck 氏と V. Enolskii 氏には Maple による計算について大変お世話になつた.

*日付 December 17, 2017

¹Example c) of Section 8.4 in p.74, and Example 3) of Section 15.4 in p.130 in [ST2].

1 種数 2

我々の目的の為に, Florian Bouyer, Marco Streng [BS] に挙げられた例から

$$(1.1) \quad C : y^2 = x^5 + (-4\sqrt{2} + 2)x^4 - 21x^3 + (-16\sqrt{2} + 64)x^2 + 160x + (142\sqrt{2} - 190)$$

を取り上げる (Table b1 の最後から 14 番目の例). もちろん, ここでは C は無限遠に一点 (∞ と書く) を持つ完備な代数曲線としてゐる. C は非特異である. この例は彼らの論文にある例のなかでは唯一 $y^2 = “x の 5 次式”$ なるものである. 筆者は一般に無限遠点が 1 つの分岐点 1 点のみである様な種数 2 の超楕円曲線を

$$y^2 + (\mu_1 x^2 + \mu_3 x + \mu_5) = x^5 + \mu_2 x^4 + \mu_4 x^3 + \mu_6 x^2 + \mu_8 + \mu_{10}$$

と書くことにしてゐるが, この note でも, 一般性を重視する場合は

$$\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = 0,$$

$$\mu_2 = -4\sqrt{2} + 2, \mu_4 = -21, \mu_6 = -16\sqrt{2} + 64, \mu_8 = 160, \mu_{10} = 142\sqrt{2} - 190$$

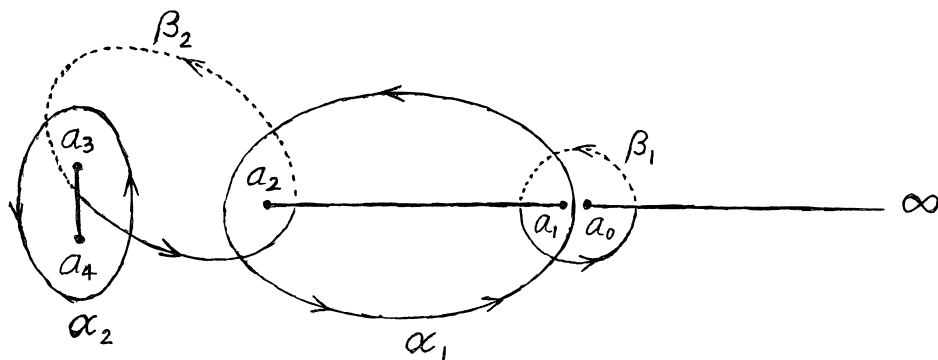
として μ_j も使ふ. 以後, 方程式 (1.1) の右辺の多項式を $f(x)$ と記す. [BS] によれば, C の Jacobi 多様体は単純でその自己準同型環は有理数体 \mathbb{Q} の非 Galois 4 次拡大の整数環と同型である.

$f(x) = 0$ の根, 即ち分岐点の x 座標の近似値は

$$\begin{aligned} a_0 &= 4.55671659\dots, \\ a_1 &= 4.55416523\dots, \\ a_2 &= -0.06888386\dots, \\ a_3 &= -2.69257186\dots + i 0.56397499\dots, \\ a_4 &= -2.69257186\dots - i 0.56397499\dots \end{aligned}$$

である. 但し, この note では虚数単位を i と表記する.

次に homology 群 $H_1(C, \mathbb{Z})$ の symplectic 基底 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ を下図の様に選ぶ.



ここでは、第 1 種微分形式の空間の基底として

$$\omega_1 = \frac{dx}{2y}, \quad \omega_2 = \frac{xdx}{2y}$$

を取る。ここで、 a_0 と a_1 が非常に近いので、周期積分の値の計算は少し面倒になるが、結果として

$$\omega' = \begin{bmatrix} \omega'_{11} & \omega'_{12} \\ \omega'_{21} & \omega'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\alpha_1} \omega_1 & \int_{\alpha_2} \omega_1 \\ \int_{\alpha_1} \omega_2 & \int_{\alpha_2} \omega_2 \end{bmatrix}, \quad \omega'' = \begin{bmatrix} \omega''_{11} & \omega''_{12} \\ \omega''_{21} & \omega''_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\beta_1} \omega_1 & \int_{\beta_2} \omega_1 \\ \int_{\beta_1} \omega_2 & \int_{\beta_2} \omega_2 \end{bmatrix},$$

は

$$\begin{aligned} \omega'_{11} &= 0.8112379 \dots, \\ \omega'_{12} &= 0.2634448 \dots, \\ \omega'_{21} &= 2.5690050 \dots, \\ \omega'_{22} &= -0.7230189 \dots, \\ \omega''_{11} &= -i \cdot 0.2009537 \dots, \\ \omega''_{12} &= 0.1317224 \dots - i \cdot 0.1867636 \dots, \\ \omega''_{21} &= -i \cdot 0.9154327 \dots, \\ \omega''_{22} &= -0.3615094 \dots + i \cdot 1.3718861 \dots \end{aligned}$$

と与えられる。この計算は J.C. Eilbeck 氏と V.Z. Enolskii 氏の支援によるものである。また、上の第 1 種微分形式を cohomology 群 $H^1(C, \mathbb{C})$ の元とみて、それを含む自然な symplectic 基底を見付けることができる。それには、第 2 種微分形式

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -\frac{\mu_4 x + 2\mu_2 x^2 + 3x^3}{2y} dx, \\ \eta_2 &= -\frac{x^2}{2y} dx \end{aligned}$$

を使えば良い。この辺りの詳しいことは [Ô] 第 5 章を参照されたい。これらに対する上記の周期行列の成分の近似値は

$$\begin{aligned} \eta'_{11} &= -3.612163429 \dots, & \eta'_{12} &= 14.3233228 \dots, \\ \eta'_{21} &= -10.48677914 \dots, & \eta'_{22} &= -1.94203145 \dots, \\ \eta''_{11} &= i 7.2675845 \dots, & \eta''_{12} &= 7.1616614 \dots - i 5.9281978 \dots, \\ \eta''_{21} &= i 4.1701996 \dots, & \eta''_{22} &= -0.97101573 \dots - i 3.4654923 \dots. \end{aligned}$$

となる。さて、

$$\eta' = \begin{bmatrix} \eta'_{11} & \eta'_{12} \\ \eta'_{21} & \eta'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\alpha_1} \eta_1 & \int_{\alpha_2} \eta_1 \\ \int_{\alpha_1} \eta_2 & \int_{\alpha_2} \eta_2 \end{bmatrix}, \quad \eta'' = \begin{bmatrix} \eta''_{11} & \eta''_{12} \\ \eta''_{21} & \eta''_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\beta_1} \eta_1 & \int_{\beta_2} \eta_1 \\ \int_{\beta_1} \eta_2 & \int_{\beta_2} \eta_2 \end{bmatrix},$$

とまとめて表記するならば, これらは一般 Legendre 関係式

$$\omega' {}^t \eta'' - \omega'' {}^t \eta' = 2\pi i 1_2$$

を満たす. ここで $\pi = 3.141592\dots$ は円周率, 1_2 は 2 次の単位行列を表す. これらの近似値と Hecke の理論や [BS] の結果から

$$\tau = \omega'^{-1} \omega'' = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_3 \\ \tau_3 & \tau_2 \end{bmatrix}$$

は

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{14}(3 + \sqrt{2} + \lambda(1 + \sqrt{2})) = \frac{1}{112}(14\lambda^3 + \lambda^2 + 2954\lambda + 371), \\ \tau_2 &= -\frac{3}{14}(3 + \sqrt{2}) + \frac{1}{14}\lambda(7 + 3\sqrt{2}) = \frac{1}{112}(42\lambda^3 - 3\lambda^2 + 13342\lambda - 1113), \\ \tau_3 &= \frac{1}{14}(1 - 2\sqrt{2}) - \frac{1}{14}\lambda = -\frac{1}{560}(\lambda^2 - 560\lambda + 91) \end{aligned}$$

で与えられることがわかる. 但し,

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{131 - 80\sqrt{2}} = i 4.2264541888150634603779802\dots, \\ \sqrt{2} &= \frac{\lambda^2 + 131}{80}, \quad \lambda^4 + 262\lambda^2 + 4361. \end{aligned}$$

このとき Humbert ([H] 参照) が singular relation と呼んでゐる関係式, 即ち, ある整数 A, B, C, D, E により

$$A\tau_1 + C\tau_2 + B\tau_3 + D(\tau_1\tau_2 - \tau_3^2) + E = 0$$

なる式が成り立つ筈である. 実際, 我々の場合は

$$A = -6, \quad B = 7, \quad C = 2, \quad D = -1, \quad E = 2$$

となる.

2 虚数乗法

以上に基き, $J = \text{Jac}(C)$ の虚数乗法を調べる. まづ

$$q[1_2 \tau] = [1_2 \tau]M$$

となる q, M を計算する. 即ち,

$$\omega' q \omega'^{-1} [\omega' \omega''] = [\omega' \omega''] M$$

なる $\omega'q\omega'^{-1} \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ と $M \in \text{Sp}(4, \mathbb{Z})$ を求めれば,

$$\omega'q\omega'^{-1} = \begin{bmatrix} (7+2\sqrt{2}) & -2 \\ -16+14\sqrt{2} & -(7+2\sqrt{2}) \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 0 & -4 \\ 12 & -7 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 12 \\ 2 & 0 & 4 & -7 \end{bmatrix}, \quad M^2 = \begin{bmatrix} 89 & & & \\ & 89 & & \\ & & 89 & \\ & & & 89 \end{bmatrix}$$

がわかる. ここで

$$(131 - 80\sqrt{2})(131 + 80\sqrt{2}) = 89 \cdot 7^2$$

に注意する. 論文 [BS] から

$$\text{End}(J) \simeq \mathbb{Z} \left[\sqrt{\frac{-11 + \sqrt{89}}{2}} \right].$$

ここで $\xi = \sqrt{\frac{-11 + \sqrt{89}}{2}} = \sqrt{\frac{11 - \sqrt{89}}{2}} i$, $\xi^\varphi = \sqrt{\frac{11 + \sqrt{89}}{2}} i$ とおく. 但し

$$\sqrt{\frac{11 - \sqrt{89}}{2}} > 0, \quad \sqrt{\frac{11 + \sqrt{89}}{2}} > 0$$

である. 志村・谷山 [ST1] の記号を使ふと

$$(\xi, \xi^\varphi)^\rho = (\xi^\varphi, -\xi), \quad (\xi, \xi^\varphi)^\tau = (\xi^\varphi, \xi).$$

このとき, $\rho^2 = \text{“複素共役”}$, $\rho^4 = \tau^2 = 1$, $\tau\rho = \rho\tau^3$ である. 行列

$$K = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & -2 \\ 6 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

は $\frac{1+\sqrt{89}}{2}$ に対応する. これは $\mathbb{Q}(\sqrt{89})$ の極大整環の \mathbb{Z} 上の生成元である. 即ち

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \left[\frac{1+\sqrt{89}}{2} \right] &\longrightarrow \mathbb{Z}[K] \\ \frac{1+\sqrt{89}}{2} &\longmapsto K \end{aligned}$$

は環の同型である. Jacobi 多様体 J の定める CM 体, つまり tensor 積 $\text{End}(J) \otimes \mathbb{Q}$ は $\mathbb{Q}(\xi)$ と同型で, これの反射体は $\mathbb{Q}(\sqrt{4\sqrt{2} - 11})$ である. 行列

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

は等式 $Q^4 + 11Q^2 + 8I = O$ を満たし, $\pm\sqrt{\frac{-11 \pm \sqrt{89}}{2}}$ の 4 つの内, いずれかに対応する.
 素直に, $\xi = \sqrt{\frac{-11 + \sqrt{89}}{2}}$ を選べば, 環同型

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[\xi] &\xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[Q] \subset M_4(\mathbb{Z}) \\ \xi &\longmapsto Q\end{aligned}$$

を得る. いま

$$\omega' q_1 \omega'^{-1} = \sqrt{-\frac{4\sqrt{2} + 11}{89}} \begin{bmatrix} -9 + \sqrt{2} & 1 \\ 8 - 7\sqrt{2} & -2 + 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

とおくと,

$$\omega' q_1 \omega'^{-1} \omega' [1_2 \ \tau] = \omega' [1_2 \ \tau] Q$$

$$\omega' q_1 \omega'^{-1} [\omega' \ \omega''] = [\omega' \ \omega''] Q$$

が成り立つ.

References

- [ST1] 志村 五郎・谷山 豊 : 近代的整数論, 共立数学講座 5, 1957
- [ST2] Shimura, G. and Y. Taniyama : Complex multiplication of Abelian varieties and its applications to number theory, Math. Soc. of Japan, 1961
- [ST3] Shimura, G. : Abelian Varieties with Complex Multiplication and Modular Functions, Princeton Univ. Press, 1997
- [H] Humbert, G, : Sur les fonctions abéliennes singulières, J. Math. 5eme serie 5(1894)221-253
- [BS] Florian Bouyer, Marco Streng : Examples of CM curves of genus two defined over the reflex field, LMS Journal of Computation and Mathematics, 18:issue 01(2015)507-538
- [Ô] 大西 良博 : Abel 函数論, 中央大学数学科講究録 6, 2014