Universal Elliptic Functions*

Yoshihiro Ônishi

いま $\wp_{\rm w}(u)$ を

$$\big(\tfrac{d}{du}\,\wp_{\rm w}(u)\big)^2=4\wp_{\rm w}(u)^3-g_2\,\wp_{\rm w}(u)-g_3,$$

を満たす Weierstrass の $\wp$ 函数とする．ここに g_2 と g_3 は複素定数で ${g_2}^3-27{g_3}^2\neq 0$ なるものである．以下では, この論文で新たに定義する $\wp$ 函数と区別するために, 添字 “w” を付けることにする．本来ならば, 新しく定義する方に添字を付けるべきであるが, 煩雑さを避けるためにこの様にすることをお許し願ひたい．Weierstrass の論文 [7] で, 彼は sigma 函数 $\sigma_{\rm w}(u)$ を

$$\sigma_{\rm w}(u)=u+O(u^5),\quad \wp_{\rm w}(u)=-\tfrac{d^2}{du^2}\log\sigma_{\rm w}(u)$$

なる特徴付けで定義してゐる．

一方, どんな楕円曲線も

$$y^2+(\mu_1x+\mu_3)y=x^3+\mu_2x^2+\mu_4x+\mu_6.$$

の形の方程式で表される．ここに, 係数 $\{\mu_j\}$ は定数と仮定してゐるが, この論文の最終段階では不定元と見做すことができる．この方程式で定義された楕円曲線を $\mathscr{E}$ と記す．Weierstrass の定式化をのものは, 基礎環の 2 や 3 の上にある座を重視してゐないため, 数論的な精密さに拘るときに, 屢々, 計算が複雑になるやうである．この論文では, sigma 函数を, $\mathscr{E}$ に対応する g_2 と g_3 から定まる函数 $\wp_{\rm w}(u)$ から構成 (定義) するのではなくて, もつと直接に $\mathscr{E}$ の方程式自体から定義する．

即ち, この論文の主目的は, 古典的な楕円函数論を一般の楕円曲線から始めて, 再構成することである．新しい結果は何もないが, この様に整理しておけば便利に思つて利用していただけることもあるかと思ふ．この様なことを記しておくと良いと思つた理由をいくつか述べる．

論文 [7] で, Weierstrass は $\sigma_{\rm w}(u)$ の u に関する冪級数展開が

$$\sigma_{\rm w}(u)=\sum_{m,n}a_{m,n}\big(\tfrac{1}{2}g_2\big)^m(2g_3)^n\frac{u^{4m+6n+1}}{(4m+6n+1)!}$$

の形であることを証明し, その係数 $a_{m,n}$ について, 次の様な漸化式を得てゐる:

$$\begin{gathered}a_{0,0}=1,\ a_{m,n}=0\ \text{ if }\ m<0 \text{ or } n<0,\\ a_{m,n}=3(m+1)a_{m+1,n-1}+\tfrac{16}{3}a_{m-2,n+1}-\tfrac{1}{3}(2m+3n-1)(4m+6n-1)a_{m-1,n}.\end{gathered}$$

この漸化式から直ちに, すべての (m,n) について $a_{m,n}\in\mathbb{Z}[\frac{1}{3}]$ であることがわかる．言ひ換へれば, $\sigma_{\rm w}(u)$ の u に関する冪級数展開は $\mathbb{Z}[\frac{1}{3},\frac{g_2}{2},2g_3]$ 上 Hurwitz 整 (次の page の定義を参照) である．この漸化式を使つて, 実際にいくつかの係数を計算をしてみると, $\frac{1}{3}$ は不要であらうと推測できる．つまり

$$a_{m,n}\in\mathbb{Z}$$

*日付 August 19, 2016　File : `n-plication15`

と予想される．しかるに，彼の漸化式を使つて $\frac{1}{3}$ を取り除くことは困難に思はれる [1]．

Weierstrass の sigma 函数と本論文で扱ふ sigma 函数の正確な関係は最後の節で述べるが，${\mu_1}^2+4\mu_2=0$ のときに限り両者は一致する．この時の $\sigma_{\mathrm{w}}(u)$ は

$$g_2=-(2\mu_3\mu_1+4\mu_4),\quad g_3=-({\mu_3}^2+4\mu_6).$$

に対応したものである．

途中，我々の sigma 函数 $\sigma(u)$ の $u=0$ における冪級数展開が Hurwitz 整であることを証明する．より正確には，平方 $\sigma(u)^2$ の u に関する冪級数展開が $\mathbb{Z}[\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_6]$ 上で Hurwitz 整であり，$\sigma(u)$ 自身のそれが $\mathbb{Z}[\frac{\mu_1}{2},\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_6]$ 上で Hurwitz 整であることを示す (3.1 節，および Theorem 2.36)．

この論文では，本質的には形式的冪級数を扱つてゐるに過ぎないが，技術的な部分は $\mathscr{E}$ の無限遠点における局所係数 $t=-x/y$ に関する $\sigma(u)$ の冪級数展開を初めに調べることにあり，u での展開はそれを使つて得るのである．

また，得られた冪級数展開のささやかな応用として $\mathscr{E}$ の n 倍多項式の最初のいくつかの係数を与へてみた (第 4 節)．

先に述べた $\sigma_{\mathrm{w}}(u)$ の冪級数が $\mathbb{Z}[\frac{g_2}{2},2g_3]$ 上 Hurwitz 整であることは，我々の主結果を使へば容易に示される (Theorem **??**)．

この論文の内容は，恐らく Mazur, Stein, Tate による [1] や [3] と深く関連すると思はれる．論文 [3] では "p-adic sigma function" が剰余体の標数 p が 2 でないときは本質的には $\sigma_{\mathrm{w}}(u)$ の $t=-x/y$ による展開として定義され，$p=2$ のときは，その様な展開の 平方 で定義されてゐる．

この論文全体は楕円曲線と楕円函数についてのみ述べられてゐるが，種数の高い代数曲線の sigma 函数についての同様な結果は，本論文の方法では得られない様に思はれる．種数の高い場合は，sigma 函数の行列式表示 ([4]) を利用するとできる．しかし，KP 階層等の理論を使ふなどやや大掛りなものであるから，まづは，素朴な方法で証明できる種数 1 の場合のみをここで述べた．

記号の約束など．通常通り $\mathbb{Z}$ は有理整数環，$\mathbb{C}$ は複素数体を表す．標数 0 の整域 A と不定元 z_1, $\cdots$, z_n について $A[[z_1,\cdots,z_n]]$ は A の元を係数とする z_1, $\cdots$, z_n の形式的冪級数環を表し，$A\langle\langle z_1,\cdots,z_n\rangle\rangle$ は A に関する Hurwitz 整な級数，つまり各係数が

$$a\frac{{z_1}^{k_1}\cdots{z_n}^{k_n}}{k_1!\cdots k_n!}\quad(a\in A)\tag{0.1}$$

の形の級数，の全体のなす環とし，A を係数とする Hurwitz 整な級数の環 と呼ぶ．例へば

$$z\mathbb{Z}\langle\langle z\rangle\rangle\ \neq\ \text{“the set of series in }\mathbb{Z}\langle\langle z\rangle\rangle\text{ of degree }\geqq 1\text{”}\tag{0.2}$$

に注意せよ．左辺には $z^2/2!$ は含まれない．この理由で $A\langle\langle z_1,\cdots,z_n\rangle\rangle$ の低次の項を含まない級数からなる部分を表すのに，記号を使はないで言葉で明示した．

[1] 筆者は，このことを V. Buchstaber 氏により指摘された．

Contents

1 The Fundamental Differential Form

1.1 The most general elliptic curve

最も一般的な elliptic curve

$$\mathscr{E}\,:\,y^2+(\mu_1x+\mu_3)y=x^3+\mu_2x^2+\mu_4x+\mu_6 \tag{1.1}$$

を考へる. ただし, 係数 $\{\mu_j\}$ は, この方程式が非特異な曲線を定義する様なものであると仮定する. 我々の主結果が得られた暁には, これらの係数を単に不定元と見做すことができる様になる. 以後

$$\begin{aligned} f(x,y)&=y^2+(\mu_1x+\mu_3)y-(x^3+\mu_2x^2+\mu_4x+\mu_6),\\ f_x(x,y)&=\tfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\mu_1y-(3x^2+2\mu_2x+\mu_4),\\ f_y(x,y)&=\tfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)=2y+(\mu_1x+\mu_3)\end{aligned} \tag{1.2}$$

なる記号も使ふ. また $\mathscr{E}$ の ∞ における local parameter として ($x^{-1/2}$ ではなく)

$$t=-x/y \tag{1.3}$$

をとり, これを <u>数論的局所変数</u> と呼ぶことにする. この t の値によつて定まる各種の変数の値を $\langle t\rangle$ つけて示す. 例へば $\mathscr{E}$ の座標 x は $x\langle t\rangle$ などと記す. 補助的に

$$s=1/x \tag{1.4}$$

を導入すると $f(x,y)=0$ は

$$s=(1+\mu_2s+\mu_4s^2+\mu_6s^3)t^2+(\mu_1s+\mu_3s^2)t \tag{1.5}$$

と書かれる. これを recursive に使つて

$$\begin{aligned} s=t^2+\mu_1t^3+({\mu_1}^2+\mu_2)t^4+({\mu_1}^3+2\mu_2\mu_1+\mu_3)t^5+\\ ({\mu_1}^4+3\mu_2{\mu_1}^2+3\mu_3\mu_1+{\mu_2}^2+\mu_4)t^6+\cdots\end{aligned} \tag{1.6}$$

なる展開を得る. (1.6) により

$$\begin{aligned} x\langle t\rangle&=t^{-2}-\mu_1t^{-1}-\mu_2-\mu_3t-(\mu_3\mu_1+\mu_4)t^2-(\mu_3{\mu_1}^2+\mu_4\mu_1+\mu_2\mu_3)t^3+\cdots,\\ y\langle t\rangle&=-t^{-3}+\mu_1t^{-2}+\mu_2t^{-1}+\mu_3+(\mu_3\mu_1+\mu_4)t+(\mu_3{\mu_1}^2+\mu_4\mu_1+\mu_2\mu_3)t^2+\cdots\end{aligned} \tag{1.7}$$

なる展開を得る. ここで, 全ての係数が $\mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}]$ に属することに注意する. いま, <u>重さ</u> wt を

$$\mathrm{wt}(x)=-2,\quad \mathrm{wt}(y)=-3,\quad \mathrm{wt}(\mu_j)=-j \tag{1.8}$$

と定義するとき, この論文に現れるすべての等式は斉重となる.

　次に, 曲線 $\mathscr{E}$ 上の第 1 種微分形式の空間の基底として

$$\omega_1(x,y)=\frac{dx}{f_y(x,y)}=\frac{dx}{2y+\mu_1x+\mu_3} \tag{1.9}$$

を採る．このとき

$$\omega_1(x,y) = \frac{dx}{2y+\mu_1 x+\mu_3} = \frac{\frac{dx}{dt}dt}{2y+\mu_1 x+\mu_3} \in (1+t\,\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2},\boldsymbol{\mu}][[t]])dt,$$
$$\omega_1(x,y) = -\frac{dy}{f_x(x,y)} \in (1+t\,\mathbb{Z}[\tfrac{1}{3},\boldsymbol{\mu}][[t]])dt \tag{1.10}$$

ゆゑ

$$\begin{aligned}\omega_1(x,y) &= (1+\mu_1 t+(\mu_2+{\mu_1}^2)t^2+(2\mu_1\mu_2+2\mu_3+{\mu_1}^3)t^3+\cdots)dt\\ &\in (1+t\,\mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t]])dt.\end{aligned} \tag{1.11}$$

1.2 The fundamental 2-form

いま $\mathscr{E}$ 上の 2 つの動点 (x,y), (z,w) について

$$\Omega(x,y,z,w) = \frac{y+w+\mu_1 z+\mu_3}{x-z}\,\omega_1(x,y) = \frac{(y+w+\mu_1 z+\mu_3)dx}{(x-z)(2y+\mu_1 x+\mu_3)} \tag{1.12}$$

を考へると，これは (x,y) についての form とみたときは，(z,w) にのみ極 (1 位で留数 1) を持つ最も“素朴な” form である．実際，$(x,y)=(z,w)$ のときに $(2w+\mu_1 z+\mu_3)=f_y(z,w)$ となるのでそこでの留数は 1 であり，$(x,y)=(z,-w-\mu_1 z-\mu_3)$ では分母子の相殺が起きるので，極にならない．上の局所変数の値 t が x を与へるとき，同じ x を与へる局所変数のもう一方の値を t' と $'$ を付けて表す: $x\langle t\rangle = x\langle t'\rangle$．このとき $y\langle t\rangle + y\langle t'\rangle = -(\mu_1 x\langle t\rangle+\mu_3)$ なので，

$$\begin{aligned}t' &= -\frac{x\langle t'\rangle}{y\langle t'\rangle} = \frac{x\langle t\rangle}{y\langle t\rangle+\mu_1 x\langle t\rangle+\mu_3}\\ &= -t-\mu_1 t^2-{\mu_1}^2 t^3+(-{\mu_1}^3-\mu_3)t^4+(-{\mu_1}^4-3\mu_3\mu_1)t^5+\cdots\in t\,\mathbb{Z}[\mu_1,\mu_3][[t]].\end{aligned} \tag{1.13}$$

上式の最初の等号より

$$\begin{aligned}tt' &= \frac{x\langle t\rangle^2}{(y\langle t\rangle+\mu_1 x\langle t\rangle+\mu_3)y\langle t\rangle} = \frac{x\langle t\rangle^2}{x\langle t\rangle^3+\mu_2 x\langle t\rangle^2+\mu_4 x\langle t\rangle+\mu_6}\\ &= \frac{1}{x\langle t\rangle(1+\mu_2\frac{1}{x\langle t\rangle}+\mu_4\frac{1}{x\langle t\rangle^2}+\mu_6\frac{1}{x\langle t\rangle^3})}\\ &= \tfrac{1}{x\langle t\rangle}(1-\mu_2\tfrac{1}{x\langle t\rangle}+\cdots).\end{aligned} \tag{1.14}$$

結局

$$\tfrac{1}{x\langle t\rangle} = tt'+\mu_2(tt')^2+\cdots\in tt'\,\mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[(tt')]] \tag{1.15}$$

がわかる．以下 $x_1=x\langle t_1\rangle$, $y_1=y\langle t_1\rangle$ などと書く．ここで，後に述べる Weierstrass の予備定理 (系 5.7) を $m=2$, $w=t_1$, $z_2=t_2$ として適用すれば

$${x_2}^{-1}-{x_1}^{-1} = -(t_1-t_2)(t_1-{t_2}')\,p(t_1,t_2) \tag{1.16}$$

と書けて (具体的な計算もして)

$$\begin{aligned}p(t_1,t_2) &= 1+\mu_1 t_1+\mu_2{t_2}^2+(\mu_2+{\mu_1}^2){t_1}^2+\mu_1\mu_2{t_2}^3+\cdots\\ &\in {x_1}^{-1}/{t_1}^2+t_2\mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t_1,t_2]]\end{aligned} \tag{1.17}$$

の様になつてゐることがわかる. 最後の事は $t_2 = 0$ としてみればわかる. また

$$
\begin{aligned}
y_1 + y_2 + \mu_1 x_2 + \mu_3 &= -\frac{x\langle t_1\rangle}{t_1} + \frac{x\langle t_2{}'\rangle}{t_2{}'} \\
&= -\frac{x\langle t_1\rangle}{t_1} + \frac{x\langle t_2\rangle}{t_1} - \frac{x\langle t_2\rangle}{t_1} + \frac{x\langle t_2{}'\rangle}{t_2{}'} \\
&= -\frac{1}{t_1}(x\langle t_1\rangle - x\langle t_2\rangle) - x\langle t_2\rangle\Big(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2{}'}\Big)
\end{aligned} \tag{1.18}
$$

であり

$$
\begin{aligned}
&x_2\Big(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2{}'}\Big)\frac{1}{x_2 - x_1} = \frac{-x_1{}^{-1}}{x_2{}^{-1} - x_1{}^{-1}}\Big(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2{}'}\Big) \\
&= \frac{-x_1{}^{-1}}{(t_2 - t_1)(t_2{}' - t_1)\, p(t_1, t_2)}\Big(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2{}'}\Big) \\
&= \frac{-x_1{}^{-1}}{(t_2 - t_1)(t_2{}' - t_1)\, (x_1{}^{-1}/t_1{}^2 + \text{“a series in } t_2\, \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t_1, t_2]]\text{”})}\frac{t_2{}' - t_1}{t_1 t_2{}'} \\
&= \frac{-x_1{}^{-1}}{(t_2 - t_1)t_1 t_2{}'\, (x_1{}^{-1}/t_1{}^2 + \text{“a series in } t_2\, \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t_1, t_2]]\text{”})} \\
&= \frac{t_1}{(t_2 - t_1)t_2} \cdot \frac{t_2}{t_2{}'} \cdot \frac{-x_1{}^{-1}/t_1{}^2}{(x_1{}^{-1}/t_1{}^2 + \text{“a series in } t_2\, \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t_1, t_2]]\text{”})}.
\end{aligned} \tag{1.19}
$$

ここで,

$$
t_2{}'/t_2 \in -1 + t_2\, \mathbb{Z}[\mu_1, \mu_3][[t_2]] \tag{1.20}
$$

に注意する. 上の (1.19) の最後の所で $x_1{}^{-1}/t_1{}^2 \in 1 + t_1 \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t_1]]$ であるから, 結局

$$
\begin{aligned}
x_2\Big(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2{}'}\Big)\frac{1}{x_2 - x_1} &= -\Big(\frac{1}{t_2 - t_1} - \frac{1}{t_2}\Big)(\text{“a series in } 1 + t_2\, \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t_1, t_2]]\text{”}) \\
&= \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_2 - t_1}(\text{“a series in } 1 + t_2\, \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t_1, t_2]]\text{”}) \\
&\qquad + (\text{“a series in } \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t_1, t_2]]\text{”})
\end{aligned} \tag{1.21}
$$

である. 従つて

$$
\begin{aligned}
\frac{y_1 + y_2 + \mu_1 x_2 + \mu_3}{x_2 - x_1} &= \frac{1}{t_1} - \frac{x_2}{x_2 - x_1}\Big(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2{}'}\Big) \\
&= \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + (\text{“a series in } \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t_1, t_2]]\text{”}) \\
&\qquad + \frac{1}{t_2 - t_1}(\text{“a series in } 1 + t_2 \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t_1, t_2]]\text{”})
\end{aligned} \tag{1.22}
$$

である. そこで $b\langle t_1, t_2\rangle \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t_1, t_2]]$ を

$$
\begin{aligned}
&\Big(\frac{y_1 + y_2 + \mu_1 x_2 + \mu_3}{x_1 - x_2} - \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\Big)\omega_1\langle t_1\rangle \\
&= \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t_1, t_2]]\omega_1\langle t_1\rangle - \frac{1}{t_2 - t_1} b\langle t_1, t_2\rangle dt_1
\end{aligned} \tag{1.23}
$$

で定めると,

$$\lim_{t_2\to t_1}\frac{x_1-x_2}{y_1+y_2+\mu_1x_2+\mu_3}\frac{1}{t_2-t_1}=\frac{\frac{dx}{dt}\langle t_1\rangle}{2y_1+\mu_1x_1+\mu_3} \tag{1.24}$$
$$=\omega_1\langle t_1\rangle/dt_1$$

ゆゑ,

$$b\langle t_1,t_1\rangle=1 \tag{1.25}$$

でなければならない. つまり

$$b\langle t_1,t_2\rangle\in 1+(t_2-t_1)\mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t_1,t_2]]. \tag{1.26}$$

これは定理として述べておく:

定理 1.27.

$$\Big(\frac{y_1+y_2+\mu_1x_2+\mu_3}{x_2-x_1}-\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\Big)\omega_1\langle t_1\rangle+\frac{dt_1}{t_1-t_2}\in\mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t_1,t_2]]dt_1 \tag{1.28}$$

である.

以上を詳しく計算してみると次の様になつてゐる:

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{y_1+y_2+\mu_1x_2+\mu_3}{x_2-x_1}-\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\Big)\omega_1\langle t_1\rangle+\frac{dt_1}{t_1-t_2}\\
=&\Big(-\mu_2t_1-\mu_3t_2t_1\\
&-(\mu_2\mu_1+2\mu_3){t_1}^2\\
&-(2\mu_3\mu_1+\mu_4)t_2{t_1}^2\\
&-(\mu_3\mu_1+\mu_4){t_2}^2t_1\\
&-(\mu_2{\mu_1}^2+4\mu_3\mu_1+{\mu_2}^2+2\mu_4){t_1}^3\\
&-(\mu_3{\mu_1}^2+\mu_4\mu_1+\mu_2\mu_3){t_2}^3t_1\\
&-(2\mu_3{\mu_1}^2+2\mu_4\mu_1+\mu_2\mu_3){t_2}^2{t_1}^2\\
&-(3\mu_3{\mu_1}^2+2\mu_4\mu_1+2\mu_2\mu_3)t_2{t_1}^3\\
&-(\mu_2{\mu_1}^3+6\mu_3{\mu_1}^2+2{\mu_2}^2\mu_1+4\mu_4\mu_1+6\mu_2\mu_3){t_1}^4-\cdots\Big)dt_1.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

ここで (1.12) の Ω を使つて

$$\boldsymbol{\xi}(x,y;z,w)=\tfrac{d}{dz}\Omega(x,y;z,w)dz-\omega_1(x,y)\eta_1(z,w) \tag{1.30}$$

とするとき

$$\boldsymbol{\xi}(x,y;z,w)=\boldsymbol{\xi}(z,w;x,y) \tag{1.31}$$

となる第 3 種微分 η_1 で ∞ にのみ極を持つものは ω_1 の定数倍の差を除いて,

$$\eta_1(x,y)=\frac{-xdx}{2y+\mu_1x+\mu_3} \tag{1.32}$$

しかない. これの t による展開は

$$\begin{aligned}\eta_1(x,y) &= -t^{-2} - \mu_3 t - (\mu_4 + 2\mu_1\mu_3)t^2 - (2\mu_1\mu_4 + 2\mu_3\mu_2 + 3{\mu_1}^2\mu_3)t^3 - \cdots \\ &\in -t^{-2} + t\,\mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t]]\end{aligned} \tag{1.33}$$

となる. さて, 以上の状況で (1.30) の $\boldsymbol{\xi}$ は

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{F(x,y;z,w)dxdz}{(x-z)^2 f_y(x,y) f_y(z,w)} \tag{1.34}$$

と書かれる. ここに

$$\begin{aligned}F(x,y;z,w) &= xz(x+z) + ({\mu_1}^2 + 2\mu_2)xz + \mu_1(zy + xw) \\ &\quad + (\mu_3\mu_1 + \mu_4)(x+z) + 2yw + \mu_3(y+w) + {\mu_3}^2 + 2\mu_6\end{aligned} \tag{1.35}$$

である.

1.3 Legendre relation

α, β を $\mathscr{E}$ の基本群のひとつの基で, その交叉積が $\alpha\cdot\beta = -\beta\cdot\alpha = 1$, $\alpha\cdot\alpha = \beta\cdot\beta = 0$ なるものについて,

$$\omega' = \int_\alpha \omega_1(x,y), \quad \omega'' = \int_\beta \omega_1(x,y), \tag{1.36}$$

と記し,

$$\Lambda = \mathbb{Z}\omega' + \mathbb{Z}\omega''. \tag{1.37}$$

と書く. これは $\mathbb{C}$ 内の格子を与へる. さらに

$$\eta' = \int_\alpha \eta_1(x,y), \quad \eta'' = \int_\beta \eta_1(x,y), \tag{1.38}$$

とすれば Legendre の関係式

$$\omega''\eta' - \omega'\eta'' = 2\pi\boldsymbol{i} \tag{1.39}$$

が成り立つ.

第 1 種微分形式と第 2 種微分形式の全体のなす空間を完全形式を法として見た空間は 1 次 cohomology 群 $H^1(\mathscr{E},\mathbb{C})$ と自然に同一視される. さらに $H_1(\mathscr{E},\mathbb{Z})$ の交叉形式を $H^1(\mathscr{E},\mathbb{C})$ に自然に移植することができて, それは各 1 形式の組 ω, η の交叉積は, $\mathscr{E}$ の正規多角形上の 1 形式 $P \mapsto \big(\int^P \omega\big)\eta(P)$ の留数の総和, で与へられる. このとき, 微分形式 ω_1 と η_1 は $H^1(\mathscr{E},\mathbb{C})$ の元として, この交叉形式に関しての symplectic 基底になつてゐる [2]. (1.39) はその事からの帰結であると解釈できる ([9] 参照). 実際,

$$\begin{aligned}\omega_1 \star \eta_1 &= \mathrm{Res}\Big(\int_0^t \omega_1(t)\Big)\eta_1(t) = \mathrm{Res}(t + \cdots)(-t^{-2} - \mu_3 t + \cdots)dt = -1, \\ \eta_1 \star \omega_1 &= \mathrm{Res}\Big(\int_{t_0}^t \eta_1(t)\Big)\omega_1(t) = \mathrm{Res}(t^{-1} + \cdots)(1 + \cdots) = 1\end{aligned}$$

[2] 中屋敷厚氏のご教示による.

等々．一方

$$\mathrm{Res}\Big(\int_0^t \omega_1(t)\Big)\eta_1(t) = \int_{\partial\mathscr{E}_\circ}\Big(\int_0^t \omega_1(t)\Big)\eta_1(t) = \cdots = \frac{1}{2\pi\boldsymbol{i}}(\omega'\eta'' - \omega''\eta'')$$

2 The sigma function

2.1 Construction of the sigma function

ここでは, [8], pp.447-449 などに述べられてゐる $\sigma(u)$ の構成法に近い方法で sigma 函数を構成する.

変数 $u\in\mathbb{C}$ について

$$u=\int_{\infty}^{(x,y)}\omega_1 \tag{2.1}$$

によつて点 $(x,y)\in\mathscr{E}$ を定める. この点の座標を u の函数とみて, 函数

$$u\mapsto x(u),\quad u\mapsto y(u) \tag{2.2}$$

を得る. 定義から

$$\begin{aligned} x(u+\ell)=x(u),\quad y(u+\ell)=y(u)\quad \text{for}\quad \ell\in\Lambda,\\ x(-u)=x(u),\quad y(-u)=y(u)+\mu_1x(u)+\mu_3\end{aligned} \tag{2.3}$$

で, これらは $u=0$ で

$$\begin{aligned} x(u)&=u^{-2}-(\tfrac{1}{12}{\mu_1}^2+\tfrac{1}{3}\mu_2)+(\tfrac{1}{240}{\mu_1}^4+\tfrac{1}{30}\mu_2{\mu_1}^2-\tfrac{1}{10}\mu_3\mu_1+\tfrac{1}{15}{\mu_2}^2-\tfrac{1}{5}\mu_4)u^2+\cdots,\\ y(u)&=-u^{-3}-\tfrac{1}{2}\mu_1u^{-2}+(\tfrac{1}{24}{\mu_1}^3+\tfrac{1}{6}\mu_2\mu_1-\tfrac{1}{2}\mu_3)+\cdots\end{aligned} \tag{2.4}$$

なる展開を持つ. u の重さは $\mathrm{wt}(u)=1$ である. この展開は Hurwitz 整である. 実際, (1.11) により, u は t の Hurwitz 整な級数に展開されるから, その逆函数

$$t=u-\tfrac{1}{2}\mu_1u^2+(\tfrac{1}{2}{\mu_1}^2-\tfrac{1}{3}\mu_2)u^3+(-\tfrac{1}{2}\mu_3-\tfrac{3}{4}{\mu_1}^3+\tfrac{13}{12}\mu_2\mu_1)u^4+\cdots \tag{2.5}$$

も Hurwitz 整となる.

変数 $u\in\mathbb{C}$ と任意に固定された $u^{(0)}\in\mathbb{C}-\Lambda$ について

$$\int_{(x^{(0)},y^{(0)})}^{(x,y)}\eta_1=\zeta(u)-\zeta(u^{(0)}) \tag{2.6}$$

なる函数 $\zeta(u)$ が存在する. 実際, 左辺の u による 導函数は

$$\eta_1(x(u),y(u))\tfrac{dx(u)}{du}=-x(u) \tag{2.7}$$

であるから $-x(u)$ の u による積分を $\zeta(u)$ とすればよい [3]. 実際, $x(u)$ は複素函数として存在して, 至る所で留数を持たない函数であるから原始函数を持つ事に注意する. ここではその原点での展開が, 定数項を持たない形式的な積分 $u^n\mapsto\frac{1}{n+1}u^{n+1}$ $(n\neq-1)$ により,

$$\zeta(u)=\int_{\text{formal}}x(u)du=-u^{-1}+(\tfrac{1}{12}{\mu_1}^2+\tfrac{1}{3}\mu_2)u+\cdots \tag{2.8}$$

となる函数として $\zeta(u)$ を定める.

[3] ${\mu_1}^2+4\mu_2=0$ のときは $\zeta(u)$ は Weierstrass の zeta 函数に他ならない (後の (2.25) を見よ).

ここで, これの t で展開について述べておく.

$$\begin{aligned}\zeta\langle t\rangle &= \zeta(u)\\ &= \int_{\text{formal}} x(u)\frac{du}{dt}dt = \int x\langle t\rangle\,\omega_1\langle t\rangle\\ &= \int \bigl(t^{-2}+c_0+\mu_3 t+(2\mu_1\mu_3+\mu_4)t^2+(3\mu_1^2\mu_3+2\mu_2\mu_3+2\mu_4\mu_1)t^3+\cdots\bigr)dt\\ &= -t^{-1}+c_0+\mu_3\tfrac{1}{2}t^2+(2\mu_1\mu_3+\mu_4)\tfrac{1}{3}t^3+(3\mu_1^2\mu_3+2\mu_2\mu_3+2\mu_4\mu_1)\tfrac{1}{4}t^4+\cdots\end{aligned}$$

である. ここに, c_0 は定数で以下に計算する. また, 最後から 1 つ前の式で, 被積分級数は (1.7) と (1.11) により $\mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}]$ に属する. さて (2.5) から

$$\begin{aligned}t^{-1} &= u^{-1}(1-\tfrac{1}{2}\mu_1 u+(\tfrac{1}{2}{\mu_1}^2-\tfrac{1}{3}\mu_2)u^2+(-\tfrac{1}{2}\mu_3-\tfrac{3}{4}{\mu_1}^3+\tfrac{13}{12}\mu_2\mu_1)u^3+\cdots)^{-1}\\ &= u^{-1}(1+\tfrac{1}{2}\mu_1 u+\cdots)\\ &= u^{-1}+\tfrac{1}{2}\mu_1+\cdots\end{aligned}$$

なので $c_0=\frac{1}{2}\mu_1$ である. つまり

$$\zeta\langle t\rangle = -t^{-1}+\tfrac{1}{2}\mu_1+\mu_3\tfrac{1}{2}t^2+(2\mu_1\mu_3+\mu_4)\tfrac{1}{3}t^3+(3\mu_1^2\mu_3+2\mu_2\mu_3+2\mu_4\mu_1)\tfrac{1}{4}t^4+\cdots \tag{2.9}$$

で, これは, 最初の 2 項を除けば Hurwitz 整である.

いま, 各 $u\in\mathbb{C}$ について $u=u'\omega'+u''\omega''$ なる u', $u''\in\mathbb{R}$ が一意に定まる. 格子の点 $\ell\in\Lambda$ についてもこの記法を踏襲して $\ell=\ell'\omega'+\ell''\omega''$ と記す. さらに u と $v\in\mathbb{C}$ について

$$L(u,v)=u\,(v'\eta'+v''\eta'') \tag{2.10}$$

とおく.

さて, (2.6) の左辺は積分路を $\ell\in\Lambda$ に相当する分だけ増やすとき, 積分の値は η_1 の周期 $\ell'\eta'+\ell''\eta''$ だけ増加する. つまり

$$\zeta(u+\ell)=\zeta(u)+\ell'\eta'+\ell''\eta''. \tag{2.11}$$

次に, $\zeta(u)$ を積分して exp を取れば Weierstrass の $\sigma(u)$ が得られる. 即ち

$$-\frac{d}{du}\log\sigma(u) = -\frac{\frac{d}{du}\sigma(u)}{\sigma(u)} = \zeta(u) \tag{2.12}$$

で函数 $\sigma(u)$ が 0 でない定数倍を除いて定まるが, さらに, それの原点における冪級数展開を

$$\sigma(u)=u+O(u^2) \tag{2.13}$$

となるものとして要請し, <u>sigma 函数</u> $\sigma(u)$ が一意的に定まる. $u_0\notin\Lambda$ に対し $\sigma(u_0)=0$ とすると, そこでの $\frac{d}{du}\sigma(u)$ の零点の位数は $\sigma(u)$ のそれより, 少ないので, 結局 $\sigma(u)$ は $u\in\Lambda$ でのみ零点を持つ整函数でなければならない. また (2.3) から sigma 函数は奇函数であることに注意する:

$$\sigma(-u)=-\sigma(u). \tag{2.14}$$

ここで (2.11) から

$$\sigma(u+\ell)=c(\ell)\sigma(u)\exp\bigl(u(\ell'\eta'+\ell''\eta'')\bigr). \tag{2.15}$$

但し, $c(\ell)$ は ℓ にのみ依存する定数である. この状況で $\ell \in \Lambda, \notin 2\Lambda$ については $\sigma(\frac{1}{2}\ell) \neq 0$ であり,

$$\sigma(\tfrac{1}{2}\ell) = -c(\ell)\sigma(\tfrac{1}{2}\ell)\exp\big(-\tfrac{1}{2}\,\ell(\ell'\eta' + \ell''\eta'')\big) \tag{2.16}$$

ゆゑ (2.10) の記号で

$$c(\ell) = -\exp\big(\tfrac{1}{2}\ell(\ell'\eta' + \ell''\eta'')\big) = -\exp L(\tfrac{1}{2}\ell, \ell) \tag{2.17}$$

となる. つまり

$$\sigma(u+\ell) = -\sigma(u)\exp L(u + \tfrac{1}{2}\ell, \ell) \quad (\ell \in \Lambda,\ \notin 2\Lambda) \tag{2.18}$$

となる. $\ell \in 2\Lambda$ のときは, (2.15) の両辺を u で微分した後, $\frac{1}{2}\ell \in \Lambda$ に注意して, 同様の計算を行へば

$$\sigma(u+\ell) = \sigma(u)\exp L(u + \tfrac{1}{2}\ell, \ell) \quad (\ell \in 2\Lambda) \tag{2.19}$$

を得る. これらを場合分けしないでまとめて書くと

$$\chi(\ell) = \exp\big[2\pi\boldsymbol{i}\big(\tfrac{1}{2}\ell' + \tfrac{1}{2}\ell'' + \tfrac{1}{2}\ell'\ell''\big)\big] \tag{2.20}$$

とおいて[4],

$$\sigma(u+\ell) = \chi(\ell)\sigma(u)\exp L(u + \tfrac{1}{2}\ell, \ell) \quad (\ell \in \Lambda) \tag{2.21}$$

となる.

2.2 The Riemann form

上で得た $L(\ ,\ )$ に対して,

$$E(u,v) = L(u,v) - L(v,u) \quad (u,\, v \in \mathbb{C})$$

とおく. これは $\mathscr{C}$ と付随する ω_1, η_1 等に対応する Riemann 形式と呼ばれるものである.

命題 2.22. $(u,v) \mapsto E(u,v)$ について次が成り立つ.
(1) $\boldsymbol{i}\mathbb{R}$ に値を取り, 交代的 $\mathbb{R}$ 双線型,
(2) $E(\boldsymbol{i}u, v) = E(\boldsymbol{i}v, u)$,
(3) $E(u,v) = 2\pi\boldsymbol{i}(u''v' - u'v'')$, 従つて $\Lambda \times \Lambda$ 上で $2\pi\boldsymbol{i}\mathbb{Z}$ に値を取る.

証明 定義に従つて計算し, Legendre の関係式 (1.39) を使へば示される. □

---

[4] χ は Λ の指標ではない.

2.3 Solution to Jacobi's inversion problem

いま

$$\wp(u) := -\tfrac{d^2}{du^2}\log\sigma(u) \tag{2.23}$$

とおくと, 先の議論から

$$\wp(u) = x(u) \tag{2.24}$$

である. この函数は

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\ell\in\Lambda,\ell\neq 0}\Big(\frac{1}{(u-\ell)^2} - \frac{1}{\ell^2}\Big) - \frac{{\mu_1}^2+4\mu_2}{12}. \tag{2.25}$$

と展開される. これは (2.4) と $\sigma(u)$ が Λ にのみ 1 位の 0 を持つ事から容易に証明される. 以上から, 等式 (2.1) のもとで

$$u = \int_\infty^{(x,y)} \omega_1(x,y) \quad のとき \quad \wp(u) = x,\ \wp'(u) = 2y + \mu_1 x + \mu_3 \tag{2.26}$$

となるが, これが Jacobi's inversion problem の解である.

もし ${\mu_1}^2 + 4\mu_2 = 0$ であれば, 上の $\wp(u)$ は, 通常の記号での $g_2 = -(2\mu_3\mu_1 + 4\mu_4)$, $g_3 = -({\mu_3}^2 + 4\mu_6)$ なる Weierstrass の $\wp$ 函数に他ならない.

2.4 Another construction of the sigma function

以下, $\sigma(u)$ の解析的な構成についてまとめて紹介する. この節を飛ばしても論理的には問題ない. ここでは次の等式を証明する.

命題 2.27. 先に定義した sigma 函数 $\sigma(u)$ は

$$\sigma(u) = -\eta_{\mathrm{D}}({\omega'}^{-1}\omega'')^{-3}\cdot\frac{\omega'}{2\pi}\cdot\exp\big(-\tfrac{1}{2}u^2\eta'{\omega'}^{-1}\big)\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}({\omega'}^{-1}u\big|{\omega'}^{-1}\omega'') \tag{2.28}$$

と表示できる [5]. ここに $\eta_{\mathrm{D}}({\omega'}^{-1}\omega'')$ は Dedekind の eta 函数

$$\eta_{\mathrm{D}}(\tau) = e^{\frac{\pi i\tau}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi i n\tau})$$

の値である.

(2.28) の右辺は明らかに全複素平面で正則である. また, [5], pp.167–168 にある様に, ここに現れる theta 級数の零点は知られてをり, それによれば, 右辺は Λ にのみ 1 位の零点を持つことがわかる.

---

[5] ここに, $\vartheta\begin{bmatrix}b\\ a\end{bmatrix}(z|\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\big[2\pi\boldsymbol{i}\{\tfrac{1}{2}(n+b)^2\tau + (n+b)(z+a)\}\big]$

判別式について

$$
\begin{aligned}
&b_2 = {\mu_1}^2 + 4\mu_2, \quad b_4 = 2\mu_4 + \mu_1\mu_3, \quad b_6 = {\mu_3}^2 + 4\mu_6,\\
&b_8 = {\mu_1}^2\mu_6 + 4\mu_2\mu_6 - \mu_1\mu_3\mu_4 + \mu_2{\mu_3}^2 - {\mu_4}^2,\\
&D = -{b_2}^2 b_8 - 8{b_4}^3 - 27{b_6}^2 + 9b_2b_4b_6\\
&\quad = -\mu_6{\mu_1}^6 + \mu_3\mu_4{\mu_1}^5 + ((-{\mu_3}^2 - 12\mu_6)\mu_2 + {\mu_4}^2){\mu_1}^4 + (8\mu_3\mu_4\mu_2 + {\mu_3}^3 + 36\mu_6\mu_3){\mu_1}^3\\
&\qquad + ((-8{\mu_3}^2 - 48\mu_6){\mu_2}^2 + 8{\mu_4}^2\mu_2 + (-30{\mu_3}^2 + 72\mu_6)\mu_4){\mu_1}^2\\
&\qquad + (16\mu_3\mu_4{\mu_2}^2 + (36{\mu_3}^3 + 144\mu_6\mu_3)\mu_2 - 96\mu_3{\mu_4}^2)\mu_1 + (-16{\mu_3}^2 - 64\mu_6){\mu_2}^3\\
&\qquad + 16{\mu_4}^2{\mu_2}^2 a + (72{\mu_3}^2 + 288\mu_6)\mu_4\mu_2 - 64{\mu_4}^3 - 27{\mu_3}^4 - 216\mu_6{\mu_3}^2 - 432{\mu_6}^2
\end{aligned}
$$

判別式と函数 η_{D} との関係は

$$
D = \Big(\frac{2\pi}{\omega'}\Big)^{12}\eta_{\mathrm{D}}({\omega'}^{-1}\omega'')^{24}, \quad \eta_{\mathrm{D}}({\omega'}^{-1}\omega'')^{-3} = \Big(\frac{2\pi}{\omega'}\Big)^{\frac{3}{2}} D^{-\frac{1}{8}}.
$$

補題 2.29. (2.28) の右辺は (2.21) を満たす.

証明 まづ (2.28) の指数函数の因子は

$$
\begin{aligned}
&\exp\big(-\tfrac{1}{2}(u+\ell)^2\eta'{\omega'}^{-1}\big)\\
&\quad = \exp\big(-\tfrac{1}{2}(u^2 + 2u\ell + \ell^2)\eta'{\omega'}^{-1}\big)\\
&\quad = \exp\big(-\tfrac{1}{2}u^2\eta'{\omega'}^{-1}\big)\exp\big(-(u\ell + \tfrac{1}{2}\ell^2)\eta'{\omega'}^{-1}\big)\\
&\quad = \exp\big(-\tfrac{1}{2}u^2\eta'{\omega'}^{-1}\big)\exp\big(-(u + \tfrac{1}{2}\ell)(\ell'\omega' + \ell''\omega'')\eta'{\omega'}^{-1}\big)\\
&\quad = \exp\big(-\tfrac{1}{2}u^2\eta'{\omega'}^{-1}\big)\exp\big(-(u + \tfrac{1}{2}\ell)(\ell'\eta' + \ell''\omega''\eta'{\omega'}^{-1})\big)\\
&\quad = \exp\big(-\tfrac{1}{2}u^2\eta'{\omega'}^{-1}\big)\exp\big(-(u + \tfrac{1}{2}\ell)(\ell'\eta' + \ell''(\omega'\eta'' + 2\pi\boldsymbol{i}){\omega'}^{-1})\big) \quad (\because (1.39)) \qquad (2.30)\\
&\quad = \exp\big(-\tfrac{1}{2}u^2\eta'{\omega'}^{-1}\big)\exp\big(-(u + \tfrac{1}{2}\ell)(\ell'\eta' + \ell''\eta'' + 2\pi\boldsymbol{i}\ell''{\omega'}^{-1})\big)\\
&\quad = \exp\big(-\tfrac{1}{2}u^2\eta'{\omega'}^{-1}\big)\\
&\qquad\quad \cdot\exp\big(-(u + \tfrac{1}{2}\ell)(\ell'\eta' + \ell''\eta'') - 2\pi\boldsymbol{i}\ell''{\omega'}^{-1}u - \pi\boldsymbol{i}(\ell'\omega' + \ell''\omega'')\ell''{\omega'}^{-1}\big)\\
&\quad = \exp\big(-\tfrac{1}{2}u^2\eta'{\omega'}^{-1}\big)\\
&\qquad\quad \cdot\exp\big(-L(u + \tfrac{1}{2}\ell, \ell) - 2\pi\boldsymbol{i}\ell''{\omega'}^{-1}u - \pi\boldsymbol{i}(\ell'\ell'' + {\ell''}^2{\omega'}^{-1}\omega'')\big)
\end{aligned}
$$

であり, また theta 級数の部分は

$$
\begin{aligned}
\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}({\omega'}^{-1}(u+\ell)\big|{\omega'}^{-1}\omega'') &= \vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}({\omega'}^{-1}u + \ell' + \ell''{\omega'}^{-1}\omega''\big|{\omega'}^{-1}\omega'')\\
&= \exp[2\pi\boldsymbol{i}\big(\tfrac{1}{2}{\ell''}^2{\omega'}^{-1}\omega'' - \ell''({\omega'}^{-1}u + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}\ell'\big)]\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}({\omega'}^{-1}u|{\omega'}^{-1}\omega'')
\end{aligned} \qquad (2.31)
$$

となるからである. □

従つて, (2.28) の右辺と先に定義した $\sigma(u)$ との商は全平面で正則かつ有界な函数であり, それは Liouville の定理から (u に依らない) 定数でなければならない. 一方,

$$
2\pi\cdot\eta_{\mathrm{D}}({\omega'}^{-1}\omega'')^3 = \frac{d}{dz}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}(z|{\omega'}^{-1}\omega'')\Big|_{z=0} = \omega'\frac{d}{du}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}({\omega'}^{-1}u|{\omega'}^{-1}\omega'')\Big|_{u=0} \qquad (2.32)
$$

であるから (たとへば, [5], p.176, line. 20 を見よ), (2.28) の右辺の $u=0$ における展開は (2.13) の右辺の形になる. よつて, それは $\sigma(u)$ と完全に一致する.

さらに次の事も示せる:

補題 2.33. (2.28) の右辺は α と β の取り換へに関して不変である.

証明 いま, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ によつて $H_1(\mathscr{E},\mathbb{Z})$ の中で $\alpha \longrightarrow c\alpha + d\beta$, $\beta \longrightarrow a\alpha + b\beta$ なる変更を受けたとせよ. このとき ω' と ω'' は

$$c\,\omega'' + d\,\omega', \quad a\,\omega'' + b\,\omega' \tag{2.34}$$

に変はり [6], η', η'' は $c\eta'' + d\eta'$, $a\eta'' + b\eta'$ に変はる. よつて (2.28) の指数函数の因子は

$$\begin{aligned}
&\exp\left[-\tfrac{1}{2}\,u^2(d\,\eta' + c\,\eta'')(d\,\omega' + c\,\omega'')^{-1}\right] \\
&\qquad = \exp\Big(-\tfrac{1}{2}\frac{u^2}{c\,\omega'' + d\,\omega'}(d\,\eta' + c\,\eta'')\Big) \\
&\qquad = \exp\Big(-\tfrac{1}{2}\frac{u^2\omega'^{-1}}{c\,\omega'' + d\,\omega'}(d\,\eta'\omega' + c\,\eta''\omega')\Big) \\
&\qquad = \exp\Big(-\tfrac{1}{2}\frac{u^2\omega'^{-1}}{c\,\omega'' + d\,\omega'}\big(d\eta'\omega' + c(\eta'\omega'' - 2\pi\boldsymbol{i})\big)\Big) \qquad (\because (1.39)) \\
&\qquad = \exp\Big(-\tfrac{1}{2}\frac{u^2\omega'^{-1}}{c\,\omega'' + d\,\omega'}\big((d\,\omega' + c\,\omega'')\eta' - 2\pi\boldsymbol{i}\big)\Big) \\
&\qquad = \exp\Big(-\tfrac{1}{2}u^2\omega'^{-1}\eta' + \frac{\pi\boldsymbol{i}u^2\omega'^{-1}}{c\,\omega'' + d\omega'}\Big) \\
&\qquad = \exp\big(-\tfrac{1}{2}u^2\omega'^{-1}\eta'\big)\exp\Big(\frac{\pi\boldsymbol{i}(u\,\omega'^{-1})^2}{c\,\omega'^{-1}\omega'' + d}\Big)
\end{aligned} \tag{2.35}$$

となる. このことと, [5], p.180 にある Dedekind eta 函数と theta 級数の modular 変換則により, 各因子から現れる因子は, すべて相殺されることがわかる. □

2.5 Main theorem and key lemma

以後の様々な過程を経て得られる, 我々の $\sigma(u)$ の原点における冪級数展開に関する定理は次の通り:

定理 2.36. 函数 $\sigma(u)^2$ の原点の周りでの展開は $\mathbb{Z}[\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_6]\langle\langle u\rangle\rangle$ に属し, $\sigma(u)$ のそれは $\mathbb{Z}[\frac{\mu_1}{2},\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_6]\langle\langle u\rangle\rangle$ に属する. また $\sigma(u)$ の原点の周りでの展開の最初の部分は

$$\begin{aligned}
\sigma(u) = u &+ \big((\tfrac{\mu_1}{2})^2 + \mu_2\big)\tfrac{u^3}{3!} + \big((\tfrac{\mu_1}{2})^4 + 2\mu_2(\tfrac{\mu_1}{2})^2 + \mu_3\mu_1 + {\mu_2}^2 + 2\mu_4\big)\tfrac{u^5}{5!} \\
&+ \big((\tfrac{\mu_1}{2})^6 + 3\mu_2(\tfrac{\mu_1}{2})^4 + 6\mu_3(\tfrac{\mu_1}{2})^3 + 3{\mu_2}^2(\tfrac{\mu_1}{2})^2 + 6\mu_4(\tfrac{\mu_1}{2})^2 \\
&\qquad + 6\mu_3\mu_2\tfrac{\mu_1}{2} + {\mu_2}^3 + 6\mu_4\mu_2 + 6{\mu_3}^2 + 24\mu_6\big)\tfrac{u^7}{7!} + \cdots
\end{aligned} \tag{2.37}$$

となる.

次の関係式はこの note を通じて, 最も重要なものである:

[6] $\tau = \omega'^{-1}\omega''$ は $\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ に変はる.

補題 2.38. Sigma 函数と $\boldsymbol{\xi}$ の関係は

$$\frac{\sigma\Big(\int_\infty^{(x,y)}\omega_1-\int_\infty^{(x_1,y_1)}\omega_1\Big)\,\sigma\Big(\int_\infty^{(z,w)}\omega_1-\int_\infty^{(z_1,w_1)}\omega_1\Big)}{\sigma\Big(\int_\infty^{(x,y)}\omega_1-\int_\infty^{(z_1,w_1)}\omega_1\Big)\,\sigma\Big(\int_\infty^{(z,w)}\omega_1-\int_\infty^{(x_1,y_1)}\omega_1\Big)}=\exp\Big(\int_{(z,w)}^{(x,y)}\int_{(z_1,w_1)}^{(x_1,y_1)}\boldsymbol{\xi}\Big) \tag{2.39}$$

で与へられる.

証明 ∞ から (x,y) に至る積分の経路を変更し, $\ell'\cdot\alpha_1+\ell''\cdot\beta_1$ (ℓ', $\ell''\in\mathbb{Z}$) に homotopic な経路分だけ増加したとし, その積分を

$$\widetilde{\int_\infty^{(x,y)}}\omega,\quad \widetilde{\int_{(z,w)}^{(x,y)}}\boldsymbol{\xi} \tag{2.40}$$

などと記す事にする. このとき, 左辺は (2.21) により,

$$\exp\Big[L\Big(-\int_\infty^{(x_1,y_1)}\omega+\int_\infty^{(z_1,w_1)}\omega,\ \ell'\omega'+\ell''\omega''\Big)\Big] \tag{2.41}$$

倍になり, 右辺の指数の部分は, (1.31) を考慮し, (1.30) を使ふと

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\int_{(z,w)}^{(x,y)}}\int_{(z_1,w_1)}^{(x_1,y_1)}\boldsymbol{\xi}(X,Y;Z,W)\\
&=\int_{(z_1,w_1)}^{(x_1,y_1)}\Bigg(\Big[\Omega(X,Y;Z,W)\Big]_{(z,w)}^{(x,y)}-\omega_1(X,Y)\Big(\int_{(z,w)}^{(x,y)}\eta_1(Z,W)+\ell'\eta'+\ell''\eta''\Big)\Bigg)\\
&=\int_{(z_1,w_1)}^{(x_1,y_1)}\int_{(z,w)}^{(x,y)}\boldsymbol{\xi}(X,Y;Z,W)-\int_{(z_1,w_1)}^{(x_1,y_1)}\omega_1(X,Y)\cdot\big(\ell'\eta'+\ell''\eta''\big)\\
&=\int_{(z_1,w_1)}^{(x_1,y_1)}\int_{(z,w)}^{(x,y)}\boldsymbol{\xi}(X,Y;Z,W)-L\Big(\int_{(z_1,w_1)}^{(x_1,y_1)}\omega_1(X,Y),\ \ell'\omega'+\ell''\omega''\Big)
\end{aligned} \tag{2.42}$$

となり, 両辺が同じ変換を受ける事がわかる. このことは他の変数についても同様である. また $(x_1,y_1)=(z_1,w_1)$ や $(x,y)=(z,w)$ の場合は両辺, 共に 1 となるので, 結局, 所望の式は正しい. □

注意 2.43. (2.39) の対数を取つて 2 回微分すれば

$$\wp\Big(\int_\infty^{(x,y)}\omega_1-\int_\infty^{(z,w)}\omega_1\Big)=\frac{F(x,y;z,w)}{(x-z)^2} \tag{2.44}$$

が得られる. この式は 2 form $\boldsymbol{\xi}$ が何であるのかを理解することに役立つ.

2.6 Frobenius-Stickelberger formula

補題 2.45. 次の等式が成り立つ:

$$\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2}=x(u)-x(v)\quad \text{(Frobenius-Stickelberger の公式)}. \tag{2.46}$$

証明 (2.21) を使ふと左辺が周期 Λ を持つ周期函数であることがわかる. 一方, $\sigma(u)$ が $u \in \Lambda$ でのみ 1 位の零点を持つことから, 両者の函数としての因子が一致することは直ぐに確認できる. 両者を u に関して展開した最初の項を見れば両辺 $1/u^2 + \cdots$ なので, 左辺と右辺は一致する. $\square$

3 Hurwitz Integrality

3.1 Hruwitz integrality 1

ここで $\sigma(u)$ の Hurwitz 整性を, 安田正大氏に指摘いただいた簡明な方法で示しておく. まづ (2.9) と (2.12) から

$$\sigma\langle t\rangle = t\exp\left(\int_{\text{formal}}(-\zeta\langle t\rangle - t^{-1})dt\right)$$

がわかるが, 指数の部分は明らかに $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_6]$ 上で t に関して Hurwitz 整なので, $\sigma\langle t\rangle$ もさうである. u と t の関係 (2.5) により, $\sigma(u)$ は u に関しても, $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_6]$ 上で Hurwitz 整である. なほ, 安田氏が与へた非常に美しい展開式が [2], Appendix C にある.

3.2 Hurwitz Integrality 2

ここでは $\sigma(u)$ の展開の様々な様相を紹介しつつ Hurwitz 整性を前節と異なる方法で証明する. 任意の t について

$$f(x\langle t\rangle, y) = (y - y\langle t\rangle)(y - y\langle t'\rangle). \tag{3.1}$$

ゆゑに

$$\begin{aligned} f_y(x\langle t\rangle, y) &= (y - y\langle t\rangle) + (y - y\langle t'\rangle) \\ \therefore\ f_y(x\langle t\rangle, y\langle t\rangle) &= y\langle t\rangle - y\langle t'\rangle. \end{aligned} \tag{3.2}$$

ここからすぐに次が従ふ:

$$f_y(x\langle t\rangle, y\langle t\rangle) = \frac{1}{(tt')^3}(t - t')(t^2 + \text{“higher terms in } \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t]]\text{”}) \tag{3.3}$$

この節では定理 2.36 を証明する.

$$u = \int_\infty^{(x,y)} \omega_1 \tag{3.4}$$

のとき, (1.11) より

$$u = t + \text{“higher terms”} \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}]\langle\langle t\rangle\rangle, \qquad t = u + \text{“higher terms”} \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}]\langle\langle u\rangle\rangle. \tag{3.5}$$

(1.28), (1.30), (1.33), (1.11) から直ちに

$$\boldsymbol{\xi}\langle t_1, t_2\rangle - \frac{dt_1 dt_2}{(t_1 - t_2)^2} \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][t_1, t_2] dt_1 dt_2 \tag{3.6}$$

であることがわかる. 詳しく計算してみると, その展開は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}\langle t_1, t_2\rangle = &\bigg(\frac{1}{(t_1 - t_2)^2} + \mu_3(t_1 + t_2) + (3\mu_3\mu_1 + 2\mu_4)t_1 t_2 \\ &+ (2\mu_3\mu_1 + \mu_4)({t_1}^2 + {t_2}^2) \\ &+ (5\mu_3{\mu_1}^2 + 4\mu_4\mu_1 + 3\mu_2\mu_3)({t_1}^2 t_2 + t_1 {t_2}^2) \\ &+ (3\mu_3{\mu_1}^2 + 2\mu_4\mu_1 + 2\mu_2\mu_3)({t_1}^3 + {t_2}^3) \\ &+ (8\mu_3{\mu_1}^3 + 7\mu_4{\mu_1}^2 + 11\mu_2\mu_3\mu_1 + 3{\mu_3}^2 + 4\mu_4\mu_2 + 3\mu_6){t_1}^2{t_2}^2 \\ &+ (7\mu_3{\mu_1}^3 + 6\mu_4{\mu_1}^2 + 10\mu_2\mu_3\mu_1 + 4{\mu_3}^2 + 4\mu_4\mu_2 + 4\mu_6)({t_1}^3 t_2 + t_1 {t_2}^3) \\ &+ (4\mu_3{\mu_1}^3 + 3\mu_4{\mu_1}^2 + 6\mu_2\mu_3\mu_1 + 3{\mu_3}^2 + 2\mu_4\mu_2 + 2\mu_6)({t_1}^4 + {t_2}^4) \\ &+ \cdots\bigg) dt_1 dt_2 \end{aligned} \tag{3.7}$$

となるので,

$$\begin{aligned} &\int_{{t_1}'}^{{t_2}'}\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\xi}\langle T_1, T_2\rangle \\ &\quad = -\log\left(-\frac{({t_2}' - t_1)(t_2 - {t_1}')}{({t_2}' - t_2)(t_1 - {t_1}')}\right) + \frac{\mu_3}{2}\big(({{t_2}'}^2 - {{t_1}'}^2)(t_2 - t_1) + ({t_2}^2 - {t_1}^2)({t_2}' - {t_1}')\big) \\ &\qquad + \text{“a series in } \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}]\langle\langle t_1, t_2\rangle\rangle \text{ of total degree} \geqq 4\text{”}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

ここで (1.16) を思ひ出しておく:

$$x\langle t_2\rangle - x\langle t_1\rangle = \frac{({t_2}' - t_1)(t_2 - t_1)\, p(t_1, t_2)}{x\langle t_1\rangle^{-1} x\langle t_2\rangle^{-1}}, \qquad (3.9)$$
$$p(t_1, t_2) = 1 + \mu_1 t_1 + \mu_2 {t_2}^2 + (\mu_2 + {\mu_1}^2){t_1}^2 + \mu_1\mu_2 {t_2}^3 + \cdots .$$

ここで t_1 と t_2 の役目を入れ換へれば

$$\begin{aligned} x\langle t_2\rangle - x\langle t_1\rangle &= -\frac{x\langle t_2\rangle^{-1} - x\langle t_1\rangle^{-1}}{x\langle t_1\rangle^{-1} x\langle t_2\rangle^{-1}} \\ &= -\frac{({t_1}' - t_2)(t_1 - t_2)\, p(t_2, t_1)}{x\langle t_1\rangle^{-1} x\langle t_2\rangle^{-1}}. \end{aligned} \qquad (3.10)$$

さて, u, v が t_1, t_2 に対応する点のとき (2.46) の両辺を $u - v$ で割つて $\frac{dx}{du} = 1/f_y(x, y)$ を使ふと

$$\frac{\sigma(2u)}{\sigma(u)^4} = \frac{d}{du} x(u) = 1\Big/\frac{du}{dx} = f_y(x(u), y(u)) \qquad (3.11)$$

がわかる. これにより

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(2u)}{\sigma(u)^4} &= f_y\langle t\rangle = f_y(x\langle t\rangle, y\langle t\rangle) \\ &= y\langle t\rangle - y\langle t'\rangle \\ &= -\frac{y\langle t'\rangle^{-1} - y\langle t\rangle^{-1}}{y\langle t\rangle^{-1} y\langle t'\rangle^{-1}} \\ &= -\frac{x\langle t\rangle}{t} + \frac{x\langle t\rangle}{t'} = (t - t')\,\frac{x\langle t\rangle}{tt'} \end{aligned} \qquad (3.12)$$

以上のことを使ふと,

$$\begin{aligned} \big(x(u) - x(v)\big)^2 &= \left(\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2}\right)^2 \quad (\because (2.46)) \\ &= \frac{\sigma(u+v)^2}{\sigma(2u)\sigma(2v)} \frac{\sigma(2u)}{\sigma(u)^4} \frac{\sigma(2v)}{\sigma(v)^4} \sigma(u-v)^2 \\ &= \exp\Big(-\int_{{t_1}'}^{{t_2}'}\!\!\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\xi}\langle T_1, T_2\rangle\Big) f_y\langle t_1\rangle f_y\langle t_2\rangle \sigma(u-v)^2 \quad (\because (2.39)) \\ &= \exp\Big(-\log\frac{({t_2}' - t_2)(t_1 - {t_1}')}{({t_2}' - t_1)(t_2 - {t_1}')} \\ &\qquad + \text{“a series in } \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t_1, t_2]] \text{ of degree} \geqq 3\text{”}\Big) f_y\langle t_1\rangle f_y\langle t_2\rangle \sigma(u-v)^2 \\ &= \left(\frac{({t_2}' - t_1)(t_2 - {t_1}')}{({t_2}' - t_2)(t_1 - {t_1}')} \times \text{“a series of the form } 1 + \cdots \text{ in } \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}]\langle\langle t_1, t_2\rangle\rangle\text{”}\right) \\ &\qquad \times f_y\langle t_1\rangle f_y\langle t_2\rangle \sigma(u-v)^2. \end{aligned} \qquad (3.13)$$

これらをまとめて, 次の主結果を得る:

定理 3.14. 点 u, v が数論的局所変数 (1.3) の値 t_1, t_2 にそれぞれ対応するものとする. このとき, Sigma 函数は次の様な形式的冪級数の積として書かれる:

$$\sigma(u-v)^2 = (t_2-t_1)^2\, q(t_1)q(t_2)\, p(t_1,t_2)\, p(t_2,t_1)\, r(t_1,t_2). \tag{3.15}$$

ここに
(3.16)

$$\begin{aligned}
&p(t_1,t_2) = \frac{x\langle t_2\rangle^{-1} - x\langle t_1\rangle^{-1}}{({t_2}'-t_1)(t_2-t_1)} = 1+\mu_1 t_1 + \mu_2 {t_2}^2 + (\mu_2+{\mu_1}^2){t_1}^2 + \cdots \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t_1,t_2]],\\
&q(t) = -x\langle t\rangle t t' = 1 - \mu_2 t^2 - \mu_2\mu_1 t^3 - (\mu_2{\mu_1}^2+\mu_4)t^4\\
&\qquad - (\mu_2{\mu_1}^3 + 2\mu_4\mu_1 + \mu_2\mu_3)t^5 + \cdots \qquad \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t]],\\
&r(t_1,t_2) = \exp\left[\int_{{t_1}'}^{{t_2}'}\int_{t_1}^{t_2}\Big(\boldsymbol{\xi}\langle T_1,T_2\rangle - \frac{dT_1dT_2}{(T_2-T_1)^2}\Big)\right]\\
&\quad = 1 - (\tfrac{1}{12}\mu_1\mu_3 + \tfrac{1}{6}\mu_4)(t_1-t_2)^4 - (\tfrac{1}{6}{\mu_1}^2\mu_3 + \tfrac{1}{3}\mu_4\mu_1)(t_1-t_2)^4(t_1+t_2)\\
&\qquad + \Big(-(\tfrac{1}{30}{\mu_3}^2 + (\tfrac{43}{180}{\mu_1}^3 + \tfrac{11}{90}\mu_2\mu_1)\mu_3 + \tfrac{43}{90}\mu_4{\mu_1}^2 + \tfrac{11}{45}\mu_2\mu_4 + \tfrac{2}{15}\mu_6)({t_1}^4+{t_2}^4)\\
&\qquad + (\tfrac{2}{15}{\mu_3}^2 + (\tfrac{11}{90}{\mu_1}^3 + \tfrac{7}{45}\mu_2\mu_1)\mu_3 + \tfrac{11}{45}\mu_4{\mu_1}^2 + \tfrac{14}{45}\mu_2\mu_4 + \tfrac{8}{15}\mu_6)t_1t_2({t_1}^2+{t_2}^2)\\
&\qquad + (-\tfrac{1}{5}{\mu_3}^2 + (\tfrac{7}{30}{\mu_1}^3 - \tfrac{1}{15}\mu_2\mu_1)\mu_3 + \tfrac{7}{15}\mu_4{\mu_1}^2 - \tfrac{2}{15}\mu_2\mu_4 + \tfrac{1}{5}\mu_6){t_1}^2{t_2}^2\Big)(t_1-t_2)^2\\
&\qquad + \cdots \quad \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}]\langle\langle t_1,t_2\rangle\rangle
\end{aligned}$$

である. ここで $t_1 = u+\cdots \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}]\langle\langle u\rangle\rangle$, $t_2 = v+\cdots\in\mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}]\langle\langle v\rangle\rangle$ ゆゑ

$$\sigma(u-v)^2 \in (u-v)^2(1+\text{“higher terms in } \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}]\langle\langle u,v\rangle\rangle\text{”}). \tag{3.17}$$

得られた展開で $t_1=t$, $t_2=0$ の場合に, 最初のいくつかの項を書いてみる：

$$
\begin{aligned}
\sigma\langle t\rangle^2 &= t^2+\mu_1 t^3+\big({\mu_1}^2+\mu_2\big)t^4+\big(\mu_3+{\mu_1}^3+2\mu_2\mu_1\big)t^5\\
&\quad+\big(\tfrac{35}{12}\mu_1\mu_3+{\mu_1}^4+3\mu_2{\mu_1}^2+\tfrac{5}{6}\mu_4+{\mu_2}^2\big)t^6\\
&\quad+\big((\tfrac{23}{4}{\mu_1}^2+3\mu_2)\mu_3+{\mu_1}^5+4\mu_2{\mu_1}^3+(\tfrac{5}{2}\mu_4+3{\mu_2}^2)\mu_1\big)t^7+\cdots,\\
\sigma\langle t\rangle &= t+\mu_1\tfrac{t^2}{2!}+\big(9(\tfrac{\mu_1}{2})^2+3\mu_2\big)\tfrac{t^3}{3!}+\big(12\mu_3+60(\tfrac{\mu_1}{2})^3+18\mu_2\mu_1\big)\tfrac{t^4}{4!}\\
&\quad+\big(145\mu_1\mu_3+525(\tfrac{\mu_1}{2})^4+450\mu_2(\tfrac{\mu_1}{2})^2+50\mu_4+45{\mu_2}^2\big)\tfrac{t^5}{5!}+\cdots.
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

注意 3.19. 上の記号で $t_1=t$, $t_0=0$ とおくと

$$
q(t)\cdot p(0,t)=-1,\quad q(0)=1,\ \ p(t,0)=-x\langle t\rangle^{-1}/t^2
\tag{3.20}
$$

なので

$$
\sigma\langle t\rangle^2=x\langle t\rangle^{-1}\,r(0,t)
\tag{3.21}
$$

を得る. が, これと (2.23), (2.26) から容易に示される式

$$
\sigma(u)=u\cdot\exp\bigg(\int_0^u\int_0^u\Big(\frac{1}{u^2}-\wp(u)\Big)dudu\bigg)
\tag{3.22}
$$

を比べていただきたい. 2 つの式 (3.21) と (3.22) は類似してゐる. この式 (3.21) は Mazur-Stein-Tate の論文 [1] で $\sigma\langle t\rangle$ の展開を得るのに使はれてゐるが (loc. cit. p.589, $\ell.-6$), 我々の $\sigma(u)$ の定義に依れば, そこの表示と異なる簡明な上の形 (3.21) になり, 彼等の p-adic modular form $\boldsymbol{E}_2$ の意味が浮かび上がる.

さて, $\sigma(u)^2$ の根号を外すと Hurwitz 整性はどうなるかが次の補題からわかる.

補題 3.23. 標数 0 の整域 A を係数とする, 不定元 z に関する Hurwitz 冪級数

$$h(z) = 1 + 2a_1\frac{z}{1!} + 2a_2\frac{z^2}{2!} + 2a_3\frac{z^3}{3!} + \cdots \tag{3.24}$$

について $a_j \in A$ $(j = 1, \cdots)$ であるとする. このとき

$$h(z) = \varphi(z)^2 \tag{3.25}$$

となる $\varphi(z)$ は $A\langle\langle z\rangle\rangle$ に属する.

証明 実際に $\varphi(z)$ の展開を計算すれば,

$$\begin{aligned}
&\Big(1 + 2a_1\frac{z}{1!} + 2a_2\frac{z^2}{2!} + \cdots\Big)^{-\frac{1}{2}} \\
&= 1 - \frac{1}{1!}\frac{1}{2}\Big(2a_1z + 2a_2\frac{z^2}{2!} + 2a_3\frac{z^3}{3!} + \cdots\Big) + \frac{1}{2!}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\Big(2a_1z + 2a_2\frac{z^2}{2!} + 2a_3\frac{z^3}{3!} + \cdots\Big)^2 \\
&\qquad - \frac{1}{3!}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\Big(2a_1z + 2a_2\frac{z^2}{2!} + 2a_3\frac{z^3}{3!} + \cdots\Big)^3 + \cdots \\
&= 1 - \frac{1}{1!}\Big(a_1z + a_2\frac{z^2}{2!} + a_3\frac{z^3}{3!} + \cdots\Big) + \frac{1}{2!}\cdot 1\cdot 3\Big(a_1z + a_2\frac{z^2}{2!} + a_3\frac{z^3}{3!} + \cdots\Big)^2 \\
&\quad - \frac{1}{3!}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\Big(a_1z + a_2\frac{z^2}{2!} + a_3\frac{z^3}{3!} + \cdots\Big)^3 + \cdots
\end{aligned} \tag{3.26}$$

となるからである. □

この補題と定理 3.14 から

$$\sigma(u) \in \mathbb{Z}[\tfrac{\mu_1}{2}, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_6]\langle\langle u\rangle\rangle \tag{3.27}$$

がわかる. ここで, $v = 0$, 即ち $t_2 = 0$ の場合に最初の数項を計算してみれば,

$$\sigma(u) = u + \big((\tfrac{\mu_1}{2})^2 + \mu_2\big)\tfrac{u^3}{3!} + \text{“higher terms in } \ \mathbb{Z}[\tfrac{\mu_1}{2}, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_6]\langle\langle u\rangle\rangle\text{”}. \tag{3.28}$$

これが, 最初にあげた (2.37) である.

4 n-plication formula

4.1 Universal n-plication formula

前節で求めた sigma 函数の冪級数展開のささやかな応用として, n 倍公式を求めてみる.
n が奇数のとき

$$\psi_n(u) := \frac{\sigma(nu)}{\sigma(u)^{n^2}} = nx(u)^{\frac{n^2-1}{2}} + C_1\,x(u)^{\frac{n^2-5}{2}}y(u) + C_2\,x(u)^{\frac{n^2-3}{2}} + C_3\,x(u)^{\frac{n^2-7}{2}}y(u) + C_4\,x(u)^{\frac{n^2-5}{2}} + \cdots + C_{n^2-1} \tag{4.1}$$

が n 倍多項式である. つまり, これの根 $(x(u), y(u))$ あるいは $u \bmod \Lambda$ 達が n-torsion points of $\mathscr{E}$ を与へるものである. 両辺を u で展開して係数を比較すれば係数 C_j が求められる. これの最初の数項は次で与へられる:

$$\begin{aligned}
&C_1 = 0\\
&C_2 = \tfrac{1}{24}\,n(n^2-1){\mu_1}^2 + \tfrac{1}{6}\,n(n^2-1)\mu_2,\\
&C_3 = 0,\\
&C_4 = \tfrac{1}{1920}\,n(n^2-1)(n^2-9){\mu_1}^4 + \tfrac{1}{240}\,n(n^2-1)(n^2-9)\mu_2{\mu_1}^2\\
&\quad + \tfrac{1}{120}\,n(n^2-1)(n^2+6)\mu_3\mu_1 + \tfrac{1}{120}\,n(n^2-1)(n^2-9){\mu_2}^2 + \tfrac{1}{60}\,n(n^2-1)(n^2+6)\mu_4,\\
&C_5 = 0,\\
&C_6 = \tfrac{1}{322560}\,n(n^2-1)(n^2-3^2)(n^2-5^2){\mu_1}^6 + \tfrac{1}{26880}\,n(n^2-1)(n^2-3^2)(n^2-5^2)\mu_2{\mu_1}^4\\
&\quad + \tfrac{1}{6720}\,n(n^2-1)(n^2-3^2)(n^2+10)\mu_3{\mu_1}^3 + \tfrac{1}{6720}\,n(n^2-1)(n^2-3^2)(n^2-5^2){\mu_2}^2{\mu_1}^2\\
&\quad + \tfrac{1}{3360}\,n(n^2-1)(n^2-3^2)(n^2+10)\mu_4{\mu_1}^2 + \tfrac{1}{1680}n(n^2-1)(n^2-3^2)(n^2+10)\mu_3\mu_2\mu_1\\
&\quad + \tfrac{1}{5040}\,n(n^2-1)(n^2-3^2)(n^2-5^2){\mu_2}^3 + \tfrac{1}{840}\,n(n^2-1)(n^2-3^2)(n^2+10)\mu_4\mu_2\\
&\quad + \tfrac{1}{840}\,n(n^2-1)(n^4+n^2+15){\mu_3}^2 + \tfrac{1}{210}\,n(n^2-1)(n^4+n^2+15)\mu_6.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

これらの係数は n が奇数のときは整数である.

<u>n が偶数のとき</u>

$$\psi_n(u) := \frac{\sigma(nu)}{\sigma(u)^{n^2}} = nx(u)^{\frac{n^2-4}{2}}y(u) + C_1\,x(u)^{\frac{n^2-2}{2}} + C_2\,x(u)^{\frac{n^2-6}{2}}y(u) + C_3\,x(u)^{\frac{n^2-4}{2}} + C_4\,x(u)^{\frac{n^2-8}{2}}y(u) + \cdots + C_{n^2-1} \tag{4.3}$$

が n 倍多項式である. つまり, これの根 $(x(u), y(u))$ あるいは $u \bmod \Lambda$ 達が n-torsion points of $\mathscr{E}$ を与へるものである. これの最初の数項は次で与へられる:

$$\begin{aligned}
C_1 &= -\tfrac{1}{2}\,n\mu_1,\\
C_2 &= -\tfrac{1}{24}\,n(n^2-2^2){\mu_1}^2 - \tfrac{1}{6}\,n(n^2-2^2)\mu_2,\\
C_3 &= -\tfrac{1}{48}\,n(n^2-2^2){\mu_1}^3 - \tfrac{1}{12}\,n(n^2-2^2)\mu_2\mu_1 - \tfrac{1}{2}\,n\mu_3,\\
C_4 &= -\tfrac{1}{1920}\,n(n^2-2^2)(n^2-4^2){\mu_1}^4 - \tfrac{1}{240}\,n(n^2-2^2)(n^2-4^2)\mu_2{\mu_1}^2\\
&\quad - \tfrac{1}{120}\,n(n^2-2^2)(n^2+9)\mu_3\mu_1 - \tfrac{1}{120}\,n(n^2-2^2)(n^2-4^2){\mu_2}^2\\
&\quad - \tfrac{1}{60}\,n(n^2-2^2)(n^2+9)\mu_4,\\
C_5 &= -\tfrac{1}{3840}\,n(n^2-2^2)(n^2-4^2){\mu_1}^5 - \tfrac{1}{480}\,n(n^2-2^2)(n^2-4^2)\mu_2{\mu_1}^3\\
&\quad - \tfrac{1}{240}\,n(n^2-2^2)(n^2+14)\mu_3{\mu_1}^2 - \tfrac{1}{240}\,n(n^2-2^2)(n^2-4^2){\mu_2}^2\mu_1\\
&\quad - \tfrac{1}{120}\,n(n^2-2^2)(n^2+9)\mu_4\mu_1 - \tfrac{1}{12}\,n(n^2-2^2)\mu_3\mu_2.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

これらの係数は n が偶数のときは整数である.

4.2 Cassels-Matthews formulae

定理 4.5. $\wp$ は曲線 $y^2 = x^3 - \frac{1}{4}$ に付随するものとせよ. つまり

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - 1.$$

$\zeta = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ と書く. このとき, ある $\omega > 0$ でもつて, $\Lambda = \omega(\mathbb{Z}+\zeta\mathbb{Z})$ と書ける. $\wp(-\zeta) = \zeta\wp(u)$ ... で, 素数 $p \equiv 1 \bmod 3$ の $\mathbb{Z}[\zeta]$ における分解を $p = \varpi\overline{\varpi}$ $(\varpi \equiv 1 \bmod 3)$ とせよ.

$$\psi_\varpi(u) = \frac{\sigma(\varpi u)}{\sigma(u)^p} = \varpi\wp(u)^{\frac{p-1}{2}} + \cdots \pm 1$$

$$\prod_{\substack{u \bmod \Lambda \\ \varpi u = 0 \\ u \neq 0}} \wp(u) = \frac{1}{\varpi^2}$$

cubic Gauss sum (Kummer sum) を

定義 4.6. $\left(-\right)_3$ を 3 次剰余記号とせよ.

$$G_3(\varpi) = \sum_{r=1}^{p-1} \left(\frac{r}{p}\right)_3 \exp\left(\frac{2\pi \boldsymbol{i} r}{p}\right)$$

$S \subset \mathbb{Z}[\zeta]$ を modulo ϖ に関する $\frac{1}{3}$-set とする. つまり

$$S \cup \zeta S \cup \zeta^2 S$$

が $\mathbb{Z}[\zeta]/\varpi\mathbb{Z}[\zeta]$ の 0 の類を除いた類の代表系になるものとせよ. 特に $\sharp S = \frac{p-1}{3}$. さらに 1 の 3 乗根 $\alpha(S)$ を

$$\alpha(S) \equiv \prod_{s \in S} s \mod \varpi$$

となる様に定める. このとき

定理 4.7. (C.R. Matthews)

$$G_3(\varpi) = p^{\frac{1}{3}} \varpi \alpha(S)^{-1} \prod_{s \in S} \wp(s\omega/\varpi)$$

$y^2 = x^3 - x$ に付随する $\wp$ についても $G_4(\varpi)$ の美しい公式がある (C.R. Matthews).

5 Weierstrass preparation theorem

ここでは (1.16) 等を導く際に必要であつた Weierstrass preparation theorem を説明する．この場合に適した形で書かれた文献を見付けることができなかつたので, 証明も述べる．H.Serbin の注意 [6] を base にした証明を述べる．ここでは $\mathscr{O}$ を標数 0 の整域とし, z_1, z_2, $\cdots$, z_m を m 個の不定元とする．

補題 5.1. いま, P, $Q \in \mathscr{O}[[z_1, z_2, \cdots, z_m]]$ が与へられたとし,

(5.2) $$P(z_1, 0, 0, \cdots, 0) = c_k\, {z_1}^k + c_{k+1}\, {z_1}^{k-1} + \cdots \qquad (c_k \in \mathscr{O}^\times;\ c_{k+1},\ \ c_{k+2},\ \cdots \in \mathscr{O})$$

であるとする．このとき, 2 つの多項式 A, $B \in \mathscr{O}[[z_1, z_2, \cdots, z_m]]$ の組を

(5.3) $$Q - PA = B$$

かつ, B は z_1 の $(k-1)$ 次より高い冪の項を含まない様にとれる．しかも, その様な A と B の組は一意的に定まる．

証明 変数の個数 m に関する帰納法による．いま,

(5.4) $$P = \sum_{j=0}^{\infty} p_j\, {z_m}^j,\ \ Q = \sum_{j=0}^{\infty} q_j\, {z_m}^j,\ \ A = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, {z_m}^j,\ \ B = \sum_{j=0}^{\infty} b_j\, {z_m}^j, \qquad (p_j,\ q_j,\ a_j,\ b_j \in \mathscr{O}[[z_1, \cdots, z_{m-1}]])$$

とおけば, 主張は

(5.5) $$(q_j - a_0\, p_j - a_1\, p_{j-1} - \cdots - a_{j-1}\, p_1) - a_j\, p_0 = b_j, \qquad (j = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$$

の解が存在することと同値である．しかるに, この方程式は j についての recursion なので, 結局 $m = 1$ の場合に帰着する．いま $P \in \mathscr{O}^\times$, $Q \in \mathscr{O}$ のとき

(5.6) $$A = Q{\cdot}P^{-1} \in \mathscr{O}, \quad B = 0$$

とおけばよい． □

系 5.7. (Weierstass preparation theorem) いま $F(w\,; z) \in \mathscr{O}[[w, z_2, \cdots, z_m]]$ が与へられたとし, $F(w\,; 0, \cdots, 0) = w^k + \cdots \in w^k\, (\mathscr{O}[[w]])^\times$ であるとする．このとき, w について k 次 monic な多項式 $G \in \mathscr{O}[w][[z_2, \cdots, z_m]]$, および $\mathscr{O}[[w, z_2, \cdots, z_m]]$ の元 U が一意的に存在して

(5.8) $$F = GU$$

と書ける．

証明 Lemma で $w = z_1$, $P = F$, $Q = w^k$ とすれば $C \in \mathscr{O}[[w, z_2, \cdots, z_m]]$ が一意的に存在して

(5.9) $$w^k - FC = -b_1(z) w^{k-1} - b_2(z) w^{k-2} - \cdots - b_{k-1}(z) \quad (z = (z_2, \cdots, z_m))$$

となる．ここで $z_1 = \cdots = z_m = 0$ とすれば

(5.10) $$w^k - (w^k + \cdots) C(w\,; 0, \cdots, 0) = -b_1(0) w^{k-1} - b_2(0) w^{k-2} - \cdots - b_{k-1}(0)$$

より

$$C(w\,;0,\cdots,0)=1+O(w). \tag{5.11}$$

また Lemma で $Q=1$, $P=C$ と取れば

$$1-UC=0 \tag{5.12}$$

となる $U(w\,;z)\in\mathscr{O}[[w,z_2,\cdots,z_m]]$ が一意に存在する．よって

$$F(w\,;z)=(w^k+b_1(z)w^{k-1}+b_2(z)w^{k-2}+\cdots+b_{k-1}(z))\,U(w;z) \tag{5.13}$$

が得られた． $\square$

6 Relation to the Weierstrass sigma function

ここでは, 序文で述べた Weierstrass 自身の $\sigma_{\mathrm{w}}(u)$ と我々の $\sigma(u)$ との関係を見る.

楕円曲線 $\mathscr{E}$ の座標を $Y = 2y + \mu_1 x + \mu_3$, $X = x - \frac{1}{3}(\mu_2 + \frac{1}{4}{\mu_1}^2)$ と変換すると方程式は

$$Y^2 = 4X^3 + (-3{\lambda_2}^2 + 2\mu_3\mu_1 + 4\mu_4)X + ({\lambda_2}^3 - \mu_1\mu_3\lambda_2 - \tfrac{1}{3}\mu_4\lambda_2 + {\mu_3}^2 + 4\mu_6), \tag{6.1}$$

となる. ここに

$$\lambda_2 = \tfrac{1}{6}({\mu_1}^2 + 4\mu_2) \tag{6.2}$$

である. 従つて $\mathscr{E}$ に対する Weierstrass の $\wp_{\mathrm{w}}(u)$ は上で

$$X = \wp_{\mathrm{w}}(u), \quad Y = \tfrac{d}{du}\wp_{\mathrm{w}}(u) \tag{6.3}$$

とした方程式を満たす. このとき 2 種類の sigma 函数の関係は (2.25), (2.37) の最初の 2 項, および, 序文で述べた条件 $\sigma_{\mathrm{w}}(u) = u + O(u^5)$ により

$$\sigma(u) = \sigma_{\mathrm{w}}(u) \exp\left(\tfrac{1}{24}({\mu_1}^2 + 4\mu_2)u^2\right) \tag{6.4}$$

となる.

7 σ 函数の行列式表示

σ 函数は無限次の行列の行列式で表すことができる. $U = u$,

$$\begin{aligned}
\log t^{1-1}\sqrt{\frac{du}{dt}} &= \tfrac{1}{2}\log\left(1+\mu_1 t+({\mu_1}^2+\mu_2)t^2+({\mu_1}^3+2\mu_2\mu_1+2\mu_3)t^3+\cdots\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\mu_1 t+(2(\tfrac{1}{2}\mu_1)^2+\mu_2)\tfrac{1}{2}t^2+(4(\tfrac{1}{2}\mu_1)^3+3\mu_2\tfrac{1}{2}\mu_1+3\mu_3)\tfrac{1}{3}t^3+\cdots\\
&= \sum \frac{c_j}{j}\, t^j
\end{aligned}$$

で c_j を定める. 後で

$$c_1 = \tfrac{1}{2}\mu_1$$

が必要である. 先に計算した Klein 2-form も使ふ.

$$\boldsymbol{\xi}(t_1, t_2) = \frac{1}{(t_1-t_2)^2} + \sum_{i,j\geqq 1} q_{ij}\, {t_1}^{i-1}{t_2}^{j-1}$$

で q_{ij} を定める.

$$q_{11} = 0$$

のみ後で必要である.

$$q(u) = c_1 u - \tfrac{1}{2}q_{11}u^2 = \tfrac{1}{2}\mu_1 u$$

とおく.

$$\mathit{\Gamma} = \left[\begin{array}{ccccc}
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\cdots & (x^2)_{(-2)} & (y)_{(-2)} & (x)_{(-2)} & (1)_{(-2)}\\
\cdots & (x^2)_{(-1)} & (y)_{(-1)} & (x)_{(-1)} & (1)_{(-1)}\\
\hline
\cdots & (x^2)_{(0)} & (y)_{(0)} & (x)_{(0)} & (1)_{(0)}\\
\cdots & (x^2)_{(1)} & (y)_{(1)} & (x)_{(1)} & (1)_{(1)}\\
\cdots & (x^2)_{(2)} & (y)_{(2)} & (x)_{(2)} & (1)_{(2)}\\
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccccc}
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\cdots & 1 & & & \\
\cdots & -2\mu_1 & 1 & & \\
\cdots & -2{\mu_1}^2-2\mu_2 & \mu_1 & 1 & \\
\cdots & 2\mu_2\mu_1-2\mu_3 & \mu_2 & -\mu_1 & \\
\hline
\cdots & {\mu_2}^2-2\mu_4 & \mu_3 & -\mu_2 & 1\\
\cdots & 0 & \mu_3\mu_1+\mu_4 & -\mu_3 & 0\\
\cdots & -{\mu_3}^2-2\mu_6 & \mu_3{\mu_1}^2+\mu_4\mu_1+\mu_2\mu_3 & -\mu_3\mu_1-\mu_4 & 0\\
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{T} = U_1 T + U_2 T^2 + \cdots = U_1 T$$

に対して

$$\boldsymbol{p} = 1 + \frac{1}{1!}\boldsymbol{T} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{T}^{\mathbf{2}} + \frac{1}{3!}\boldsymbol{T}^{\mathbf{3}} + \cdots = p_0 + p_1 T + p_2 T^2 + p_3 T^3 + \cdots$$

で p_j を定める. このとき

$$p_0 = 1,\ p_1 = u,\ p_2 = \tfrac{1}{2}u^2,\ p_3 = \tfrac{1}{3}u^3,\ \cdots$$

となる.

$$S = \left[\begin{array}{cccccc|cccc} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & 1 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{array}\right]$$

$$q(U) = \sum_{j=1}^{g} c_{w_j} U_{w_j} = c_1 U_1 = \tfrac{1}{2}\mu_1 u$$

$$\sigma(BU) = \det(S\mathit{\Gamma}) \cdot \exp q(U)$$

$$U_1 = u,\ U_2 = U_3 = \cdots = 0$$

と取つたから

$$\sigma(u) = \det(S\mathit{\Gamma}) \cdot \exp q(u) = \det(S\mathit{\Gamma}) \cdot \exp\left(\tfrac{1}{2}\mu_1 u\right)$$

Schur 多項式の和に展開することについては佐武：線型代数学, p.68 を見よ.

`~/research/genus1/hurwitz/frame_UGM05.gp` を参照

8 σ 函数の展開係数の漸化式

ここでは Weierstrass [7] をわかり易く書き下す.

$$\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \tag{8.1}$$

これより

$$\frac{\partial^2\wp}{\partial u^2} = 6\wp^2 - \tfrac{1}{2}g_2.$$

を得る. いま $\wp(u)$ は, u の g_2 と g_3 の多項式係数の冪級数であると見做して, (8.1) の両辺を g_2 および g_3 で偏微分して得られる

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial\wp}{\partial u}\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\partial\wp}{\partial g_2} = (12\wp^2 - g_2)\dfrac{\partial\wp}{\partial g_2} - \wp, \\ 2\dfrac{\partial\wp}{\partial u}\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\partial\wp}{\partial g_3} = (12\wp^2 - g_2)\dfrac{\partial\wp}{\partial g_3} - 1 \end{cases}$$

すなはち,

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial\wp}{\partial u}\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\partial\wp}{\partial g_2} = 2\dfrac{\partial^2\wp}{\partial u^2}\dfrac{\partial\wp}{\partial g_2} - \wp, \\ 2\dfrac{\partial\wp}{\partial u}\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\partial\wp}{\partial g_3} = 2\dfrac{\partial^2\wp}{\partial u^2}\dfrac{\partial\wp}{\partial g_3} - 1 \end{cases}$$

これらを $\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2$ で割ると

$$\begin{cases} 2\dfrac{\frac{\partial\wp}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial\wp}{\partial g_2} - \frac{\partial^2\wp}{\partial u^2}\frac{\partial\wp}{\partial g_2}}{\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2} = -\dfrac{\wp}{\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2}, \\ 2\dfrac{\frac{\partial\wp}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial\wp}{\partial g_3} - \frac{\partial^2\wp}{\partial u^2}\frac{\partial\wp}{\partial g_3}}{\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2} = -\dfrac{1}{\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2} \end{cases}$$

を得る. つまり

$$\begin{aligned} &2\frac{\partial}{\partial u}\frac{\frac{\partial\wp}{\partial g_2}}{\frac{\partial\wp}{\partial u}} = -\frac{\wp}{\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2}, \\ &2\frac{\partial}{\partial u}\frac{\frac{\partial\wp}{\partial g_3}}{\frac{\partial\wp}{\partial u}} = -\frac{1}{\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2} \end{aligned} \tag{8.2}$$

となり, 左辺は積分を持つ形になつた. これの右辺も積分できる形にできないだらうか. それを手取り早く調べるために,

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\frac{\partial\wp}{\partial u}}, \quad \frac{\partial}{\partial u}\frac{\wp}{\frac{\partial\wp}{\partial u}}, \quad \frac{\partial}{\partial u}\frac{\wp^2}{\frac{\partial\wp}{\partial u}}$$

を計算すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\frac{\partial\wp}{\partial u}} &= -\frac{\frac{\partial^2\wp}{\partial u^2}}{\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2} = -\frac{6\wp^2-\frac{1}{2}g_2}{\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2},\\
\frac{\partial}{\partial u}\frac{\wp}{\frac{\partial\wp}{\partial u}} &= \frac{\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2-\wp\frac{\partial^2\wp}{\partial u^2}}{\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2},\\
&= \frac{4\wp^3-g_2\wp-g_3-\wp(6\wp^2-\frac{1}{2}g_2)}{\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2}\\
&= \frac{-2\wp^3-\frac{1}{2}g_2\wp-g_3}{\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2}\\
&= \frac{(-2\wp^3+\frac{1}{2}g_2+\frac{1}{2}g_3)-g_2\wp-\frac{3}{2}g_3}{\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2}\\
&= -\frac{1}{2}+\frac{-g_2\wp-\frac{3}{2}g_3}{\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2},\\
\frac{\partial}{\partial u}\frac{\wp^2}{\frac{\partial\wp}{\partial u}} &= \frac{2\wp\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2-\wp^2\frac{\partial^2\wp}{\partial u^2}}{\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2}\\
&= \frac{2\wp(4\wp^3-g_2\wp-g_3)-\wp^2(6\wp^2-\frac{1}{2}g_2)}{\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2}\\
&= \frac{2\wp^4-\frac{3}{2}g_2\wp^2-2g_3\wp}{\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2}\\
&= \frac{(2\wp^4-\frac{1}{2}g_2\wp^2-\frac{1}{2}g_3\wp)-g_2\wp^2-\frac{3}{2}g_3\wp}{\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2}\\
&= \frac{1}{2}\wp-\frac{g_2\wp^2+\frac{3}{2}g_3\wp}{\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2}
\end{aligned}
$$

となるので,

$$
\begin{aligned}
2\frac{\partial}{\partial u}\left(3g_3g_2\frac{1}{\frac{\partial\wp}{\partial u}}+{g_2}^2\frac{\wp}{\frac{\partial\wp}{\partial u}}+(-18)g_3\frac{\wp^2}{\frac{\partial\wp}{\partial u}}\right) &= -\frac{6\wp^2-\frac{1}{2}g_2}{\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2}\times 3g_3g_2\\
&\quad+\left(-\frac{1}{2}+\frac{-g_2\wp-\frac{3}{2}g_3}{\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2}\right)\times {g_2}^2\\
&\quad+\left(\frac{1}{2}\wp-\frac{g_2\wp^2+\frac{3}{2}g_3\wp}{\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2}\right)\times(-18)g_3\\
&= -\frac{1}{2}{g_2}^2-9g_3\wp-\frac{({g_2}^3-27{g_3}^2)\wp}{\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2},\\
2\frac{\partial}{\partial u}\left(-{g_2}^2\frac{1}{\frac{\partial\wp}{\partial u}}+9g_3\frac{\wp}{\frac{\partial\wp}{\partial u}}+6g_2\frac{\wp^2}{\frac{\partial\wp}{\partial u}}\right) &= -\frac{9}{2}g_3+3g_2\wp+\frac{1}{2}\frac{{g_2}^3-27{g_3}^2}{\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2}.
\end{aligned}
$$

これと (8.2) から

$$\begin{cases} -2({g_2}^3-27{g_3}^2)\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\frac{\partial\wp}{\partial g_2}}{\frac{\partial\wp}{\partial u}} = \dfrac{1}{2}{g_2}^2+9g_3\wp+\dfrac{\partial}{\partial u}\left(3g_3g_2\dfrac{1}{\frac{\partial\wp}{\partial u}}+{g_2}^2\dfrac{\wp}{\frac{\partial\wp}{\partial u}}+(-18)g_3\dfrac{\wp^2}{\frac{\partial\wp}{\partial u}}\right), \\ -({g_2}^3-27{g_3}^2)\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\frac{\partial\wp}{\partial g_3}}{\frac{\partial\wp}{\partial u}} = \dfrac{9}{2}g_3-3g_2\wp+\dfrac{\partial}{\partial u}\left(-{g_2}^2\dfrac{1}{\frac{\partial\wp}{\partial u}}+9g_3\dfrac{\wp}{\frac{\partial\wp}{\partial u}}+6g_2\dfrac{\wp^2}{\frac{\partial\wp}{\partial u}}\right). \end{cases}$$

どの項の積分も奇函数であることから, 積分定数は 0 となり,

$$\therefore \begin{cases} -2({g_2}^3-27{g_3}^2)\dfrac{\frac{\partial\wp}{\partial g_2}}{\frac{\partial\wp}{\partial u}} = \dfrac{1}{2}{g_2}^2u-9g_3\dfrac{\partial\log\sigma}{\partial u}+\left(3g_3g_2\dfrac{1}{\frac{\partial\wp}{\partial u}}+{g_2}^2\dfrac{\wp}{\frac{\partial\wp}{\partial u}}+(-18)g_3\dfrac{\wp^2}{\frac{\partial\wp}{\partial u}}\right), \\ -({g_2}^3-27{g_3}^2)\dfrac{\frac{\partial\wp}{\partial g_3}}{\frac{\partial\wp}{\partial u}} = \dfrac{9}{2}g_3u+3g_2\dfrac{\partial\log\sigma}{\partial u}-{g_2}^2\dfrac{1}{\frac{\partial\wp}{\partial u}}+9g_3\dfrac{\wp}{\frac{\partial\wp}{\partial u}}+6g_2\dfrac{\wp^2}{\frac{\partial\wp}{\partial u}}, \end{cases}$$

$$(8.3)\quad \therefore \begin{cases} -2({g_2}^3-27{g_3}^2)\dfrac{\partial\wp}{\partial g_2} = \dfrac{1}{2}{g_2}^2u\dfrac{\partial\wp}{\partial u}-9g_3\dfrac{\partial\log\sigma}{\partial u}\dfrac{\partial\wp}{\partial u}+3g_3g_2+{g_2}^2\wp-18g_3\wp^2, \\ -({g_2}^3-27{g_3}^2)\dfrac{\partial\wp}{\partial g_3} = \dfrac{9}{2}g_3u\dfrac{\partial\wp}{\partial u}+3g_2\dfrac{\partial\log\sigma}{\partial u}\dfrac{\partial\wp}{\partial u}-{g_2}^2+9g_3\,\wp+6g_2\,\wp^2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} -2({g_2}^3-27{g_3}^2)\dfrac{\partial\wp}{\partial g_2} = \dfrac{1}{2}{g_2}^2u\left(\dfrac{\partial\wp}{\partial u}+2\wp\right)-9g_3\dfrac{\partial\log\sigma}{\partial u}\dfrac{\partial\wp}{\partial u}+3g_3g_2-18g_3\wp^2, \\ -({g_2}^3-27{g_3}^2)\dfrac{\partial\wp}{\partial g_3} = \dfrac{9}{2}g_3\left(u\dfrac{\partial\wp}{\partial u}+2\wp\right)+3g_2\dfrac{\partial\log\sigma}{\partial u}\dfrac{\partial\wp}{\partial u}-{g_2}^2+6g_2\,\wp^2 \end{cases}$$

を得る. さらに

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{\frac{\partial\sigma}{\partial g_3}}{\sigma}\right) &= \frac{\partial^2}{\partial u^2}\frac{\partial}{\partial g_3}\log\sigma = \frac{\partial}{\partial g_3}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\log\sigma = \frac{\partial\wp}{\partial g_3}, \\ \frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{u}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right) &= -u\frac{\partial\wp}{\partial u}-2\wp, \\ \frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}\right) &= \frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{\partial^2\log\sigma}{\partial u^2}+\left(\frac{\partial\log\sigma}{\partial u}\right)^2\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{\partial\wp}{\partial u}-2\wp\frac{\partial\log\sigma}{\partial u}\right) \\ &= -\frac{\partial^2\wp}{\partial u^2}+2\wp^2-2\frac{\partial\wp}{\partial u}\frac{\partial\log\sigma}{\partial u} \\ &= -4\wp^2+\frac{1}{2}g_2-2\frac{\partial\wp}{\partial u}\frac{\partial\log\sigma}{\partial u}. \end{aligned}$$

これらを使つて (8.3) を書き直すと

$$\begin{cases} -2({g_2}^3-27{g_3}^2)\dfrac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\dfrac{\frac{\partial\sigma}{\partial g_2}}{\sigma}\right) = \dfrac{1}{2}{g_2}^2\dfrac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\dfrac{u}{\sigma}\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}\right)+\dfrac{9}{2}g_3\dfrac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}\right)-\dfrac{9}{4}g_2g_3+3g_2g_3, \\ -({g_2}^3-27{g_3}^2)\dfrac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\dfrac{\frac{\partial\sigma}{\partial g_3}}{\sigma}\right) = -\dfrac{9}{2}g_3\dfrac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\dfrac{u}{\sigma}\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}\right)-\dfrac{3}{2}g_2\dfrac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}\right)+\dfrac{3}{4}{g_2}^2-{g_2}^2. \end{cases}$$

u で 2 回積分するのであるが, どの項も偶函数なので

$$\begin{cases} -2({g_2}^3-27{g_3}^2)\left(\dfrac{\frac{\partial\sigma}{\partial g_2}}{\sigma}\right)=\dfrac{1}{2}{g_2}^2\left(\dfrac{u}{\sigma}\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}\right)+\dfrac{9}{2}g_3\left(\dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}\right)+\dfrac{3}{8}g_2g_3u^2+\dfrac{1}{2}B, \\ \quad -({g_2}^3-27{g_3}^2)\left(\dfrac{\frac{\partial\sigma}{\partial g_3}}{\sigma}\right)=-\dfrac{9}{2}g_3\left(\dfrac{u}{\sigma}\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}\right)-\dfrac{3}{2}g_2\left(\dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}\right)-\dfrac{1}{8}{g_2}^2u^2+\dfrac{1}{2}C, \end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} -4({g_2}^3-27{g_3}^2)\left(\dfrac{\frac{\partial\sigma}{\partial g_2}}{\sigma}\right)={g_2}^2\left(\dfrac{u}{\sigma}\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}\right)+9g_3\left(\dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}\right)+\dfrac{3}{4}g_2g_3u^2+B, \\ -2({g_2}^3-27{g_3}^2)\left(\dfrac{\frac{\partial\sigma}{\partial g_3}}{\sigma}\right)=-9g_3\left(\dfrac{u}{\sigma}\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}\right)-3g_2\left(\dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}\right)-\dfrac{1}{4}{g_2}^2u^2+C, \end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} -4({g_2}^3-27{g_3}^2)\dfrac{\partial\sigma}{\partial g_2}={g_2}^2u\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}+9g_3\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}+\dfrac{3}{4}g_2g_3u^2\sigma+B\sigma, \\ -2({g_2}^3-27{g_3}^2)\dfrac{\partial\sigma}{\partial g_3}=-9g_3u\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}-3g_2\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}-\dfrac{1}{4}{g_2}^2u^2\sigma+C\sigma, \end{cases}$$

u の 1 次の項を調べると

$$\begin{aligned} 0&={g_2}^2-0+0+B, \\ 0&=-9g_2-0+0+C. \end{aligned}$$

σ の 2 回微分の項を消去するため,

$$\begin{aligned} &\big\{(\text{第 1 式})\times 9g_3+(\text{第 2 式})\times {g_2}^2\big\}\div({g_2}^3-27{g_3}^2), \\ &\big\{(\text{第 1 式})\times g_2+(\text{第 2 式})\times 3g_3\big\}\div({g_2}^3-27{g_3}^2) \end{aligned}$$

を計算すると

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}-12g_3\frac{\partial\sigma}{\partial g_2}-\frac{2}{3}{g_2}^2\frac{\partial\sigma}{\partial g_3}+\frac{1}{12}g_2u^2\sigma=0, \tag{8.4}$$

$$u\frac{\partial\sigma}{\partial u}-4g_2\frac{\partial\sigma}{\partial g_2}-6g_3\frac{\partial\sigma}{\partial g_3}-\sigma=0 \tag{8.5}$$

を得る. この 2 つのうち後者は u の重さが 1 であることを示すに過ぎない. 前者は所望の漸化式を与える.

$\mu_1=\mu_2=\mu_3=0$ のとき,

$$\begin{aligned} \sigma(u)&=\sum_{m,n}a_{m,n}\left(\tfrac{1}{2}g_2\right)^m(2g_3)^n\frac{u^{4m+6n+1}}{(4m+6n+1)!} \quad \text{(Weierstrass のおき方)} \\ &=\sum_{m,n}c_{m,n}\,{\mu_4}^m{\mu_6}^n\frac{u^{4m+6n+1}}{(4m+6n+1)!} \end{aligned}$$

とおくとき,

$$a_{m,n}=3(m+1)a_{m+1,n-1}-\frac{16}{3}(n+1)a_{m-2,n+1}+\frac{1}{3}(2m+3n-1)(4m+6n-1)a_{m-1,n}, \quad (m\geqq 0,\ n\geqq 1)$$

となる. $g_2=-4\mu_4$, $g_4=-4\mu_6$, $a_{m,n}(-2)^m(-8)^n=c_{m,n}$ であるから, これを書き直すと

$$c_{m,n}=12(m+1)c_{m+1,n-1}-\frac{8}{3}(n+1)c_{m-2,n+1}+\frac{2}{3}(2m+3n-1)(4m+6n-1)c_{m-1,n}$$

但し, $c_{0,0}=1$ とし, $m<0$ または $n<0$ のときは $c_{m,n}=0$ とする. $(m,n)=(1,0)$ のとき $c_{1,0}=24\,c_{2,-1}-\frac{8}{3}\,c_{-1,1}+2\,c_{0,0}$ なので $c_{1,0}=2$. $(m,n)=(1,0)$ のとき $c_{0,1}=12\,c_{1,0}-\frac{16}{3}\,c_{-2,2}+\frac{10}{3}\,c_{-1,1}$ なので $c_{0,1}=12c_{1,0}=24$.

$$\begin{aligned}\sigma(u)&=u+2\mu_4\frac{u^5}{5!}+24\mu_6\frac{u^7}{7!}-36{\mu_4}^2\frac{u^9}{9!}-288\mu_4\mu_6\frac{u^{11}}{11!}+(-3456{\mu_6}^2-552{\mu_4}^3)\frac{u^{13}}{13!}+\cdots\\&=u-\frac{g_2}{2}\frac{u^5}{5!}-6g_3\frac{u^7}{7!}+\cdots\\&=u-\frac{g_2}{240}u^5-\frac{g_3}{840}u^7+\cdots\end{aligned}$$

問 この様な漸化式を μ_j $(j=1,\,3,\,2,\,4,\,6)$ を全て含めた形で与へることはできるか.

9 Weierstrass の無限積へ展開

$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ について (2.25)

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\substack{\ell\in\Lambda \\ \ell\neq 0}} \Big(\frac{1}{(u-\ell)^2} - \frac{1}{\ell^2} \Big)$$

を形式的に積分すると

$$\zeta(u) = -\frac{1}{u} + \sum_{\substack{\ell\in\Lambda \\ \ell\neq 0}} \Big(-\frac{1}{(u-\ell)} - \frac{1}{\ell} - \frac{u}{\ell^2} \Big)$$

再度, 積分すると

$$-\log\sigma(u) = -\log u + \sum_{\substack{\ell\in\Lambda \\ \ell\neq 0}} \Big(-\log\frac{u-\ell}{-\ell} - \frac{u}{\ell} - \frac{u^2}{2\ell^2} \Big)$$

これより

$$\sigma(u) = u \prod_{\substack{\ell\in\Lambda \\ \ell\neq 0}} \left(1 - \frac{u}{\ell} \right) \exp\left(\frac{u}{\ell} + \frac{u^2}{2\ell^2} \right)$$

References

[1] B. Mazur, W. Stein and J. Tate. Computation of p-adic height and log convergence. *Documenta math.*, Extra Volume : John H. Coates' Sixtieth Birthday:577–614, 2006.

[2] K. Bannnai and S. Kobayashi. Divisibilities of eisenstein-kronecker numbers and p-adic theta functions at supersingular primes. 2007.

[3] B. Mazur and J. Tate. The p-adic sigma function. *Duke Math. J.*, 62:663–688, 1991.

[4] A. Nakayashiki. Sigma function as a tau function. *Internat. Math. Res. Notices*, 2010:373–394, 2010.

[5] H. Rademacher. *Topics in analytic number theory,* (*Die Grundlehren der math. Wiss. Bd.169*). Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1973.

[6] H. Serbin. Weierstrass preparation theorem. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 46(2):168, 1940.

[7] K. Weierstrass. Zur Theorie der elliptischen Functionen. *Mathmatische Werke*, *Bd.2*: 245–255, 1894.

[8] E.T. Whittaker and G.N. Watson. *A course of modern analysis.* Cambridge Univ. Press, 1927.

[9] Y.Ônishi. Abel 函数論 (中央大学数学教室講究録 6). 中央大学大学院理工学研究科, 2012.