

「数理のひろがり」 演習問題 3

3.1 3 の剰余系 $\mathbf{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ を使って 3 次のアフィン平面 $\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3$ を考える. このなかの直線を, 平行なものを組にしながらか, すべて方程式で書き上げよ.

3.2 5 の剰余系 $\mathbf{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ の加法および乗法に関する演算表を作成せよ. さらに 5 次のアフィン平面 $\mathbf{Z}_5 \times \mathbf{Z}_5$ を考え, このなかの 2 直線

$$y = x + \bar{4}, \quad y = \bar{4}x + \bar{3}$$

の共有点を求めよ.

3.3 7 の剰余系 $\mathbf{Z}_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{6}\}$ を使って 7 次のアフィン平面 $\mathbf{Z}_7 \times \mathbf{Z}_7$ を考える. このなかの 2 直線

$$y = \bar{2}x - \bar{4}, \quad y = \bar{5}x + \bar{6}$$

の共有点を求めよ.

3.4 4 の剰余系 $\mathbf{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ を使って, ある種の平面 $\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_4$ を考える. このなかの “平行でない” 2 直線

$$y = \bar{1}x + \bar{1}, \quad y = \bar{3}x + \bar{2}$$

は共有点を持つかどうか調べよ. また, 2 直線

$$\bar{1}x + \bar{3}y = \bar{2}, \quad \bar{2}x + \bar{2}y = \bar{0}$$

についてその共有点をすべて求めよ.

その結果からこの平面 $\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_4$ が アフィン平面でないことを確認せよ.

3.5 6 の剰余系 $\mathbf{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{5}\}$ を使って, ある種の平面 $\mathbf{Z}_6 \times \mathbf{Z}_6$ を考える. このなかの “平行でない” 2 直線

$$y = \bar{1}x + \bar{1}, \quad y = \bar{5}x + \bar{2}$$

が共有点を持つかどうか調べよ. また, 2 直線

$$\bar{2}x + \bar{3}y = \bar{2}, \quad \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{0}$$

についてその共有点をすべて求めよ.

その結果からこの平面 $\mathbf{Z}_6 \times \mathbf{Z}_6$ が アフィン平面でないことを確認せよ.

3.6 教科書の pp.42-49 のように, 体 $\mathbf{F}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, z, \bar{1} + z\}$ を使って 4 次のアフィン平面 $\mathbf{F}_4 \times \mathbf{F}_4$ を考える. このなかの 2 直線

$$\bar{1}x + zy = \bar{1} + z, \quad zx + \bar{1}y = z$$

の共有点を求めよ.

3.7 教科書の p.50 で述べられている体 $\mathbf{F}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, z, \dots, \bar{1} + z + z^2\}$ を使って 8 次のアフィン平面 $\mathbf{F}_8 \times \mathbf{F}_8$ を考える. このなかの 2 直線

$$\bar{1}x + (\bar{1} + z)y = \bar{1} + z^2, \quad z^2x + \bar{1}y = z + z^2$$

の共有点を求めよ.