

「数理のひろがり」演習問題 5

5.1 $z^9 - z$ を有理数の範囲で因数分解せよ.

5.2 $z^9 - z$ を \mathbf{Z}_3 の範囲で因数分解せよ.

5.3 $z^2 + 1$ は \mathbf{Z}_3 の範囲で因数分解できないが, \mathbf{Z}_5 の範囲では因数分解できることを確かめよ. それゆゑ, \mathbf{Z}_3 を 拡大した

$$F_9 = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, z, z + \bar{1}, z + \bar{2}, \bar{2}z, \bar{2}z + \bar{1}, \bar{2}z + \bar{2} \}, \quad (z^2 + \bar{1} = \bar{0})$$

は 体 であるが, \mathbf{Z}_5 を $z^2 + \bar{1} = \bar{0}$ なる z を使って拡大して $5^2 = 25$ 個の要素からなる体を作ることはできない.

5.4 $z^2 + z + 1$ は \mathbf{Z}_5 の範囲では因数分解できないことを確かめよ. それゆゑ, \mathbf{Z}_5 を拡大した

$$F_{25} = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \\ z, z + \bar{1}, z + \bar{2}, z + \bar{3}, z + \bar{4}, \\ \bar{2}z, \bar{2}z + \bar{1}, \bar{2}z + \bar{2}, \bar{2}z + \bar{3}, \bar{2}z + \bar{4}, \\ \bar{3}z, \bar{3}z + \bar{1}, \bar{3}z + \bar{2}, \bar{3}z + \bar{3}, \bar{3}z + \bar{4}, \\ \bar{4}z, \bar{4}z + \bar{1}, \bar{4}z + \bar{2}, \bar{4}z + \bar{3}, \bar{4}z + \bar{4} \}, \quad (z^2 + z + \bar{1} = \bar{0})$$

は 25 個の要素からなる体である.

5.5 \mathbf{Z}_2 の範囲で, $z^2 + z + 1$, $z^3 + z + 1$, $z^4 + z + 1$ は因数分解できない (既約 という) ことと, $z^5 + z + 1$ は因数分解できることを示せ.

5.6 \mathbf{Z}_2 の範囲で, $z^5 + z^2 + 1$ および $z^6 + z + 1$ が既約であることを示せ.