実施：2013 年 7 月 29 日 (月) 10:40-12:10, LC-13 室

「代数的構造」期末試験問題兼解答用紙

(2013 年度, 前期, 月曜 II 時限, 数学教育専修, 数理情報コース, 各 3 年)

試験時間 80 分, 教科書: 永尾 汎 著 「代 数 学」

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は 11:40 の時点の一回限りとする.

1 (20 点) (ii) $N \lhd G$ かつ $H < G$ であるとする. このとき, 次の (1), (2), (3) を示せ.

(1) $H \cap N \lhd H$.

(2) $NH = HN$, 従って $NH < G$.

(3) 特に $H \lhd G \implies NH \lhd G$.

2 (20 点) Klein の 4 元群

$$V = \{\, 1, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \,\} \; (< S_4)$$

について $V \lhd S_4$ を示せ.

ただし, S_4 が $\{(12), (23), (34)\}$ で生成されることは既知とする (p.21, **問 7.10**).

学籍番号	氏名	点

$\boxed{\mathbf{3}}$ (20 点) G を群とし, $a \in G$ に対して $\iota(a): G \to G$ $(x \mapsto x^{\iota(a)} = a^{-1}xa)$ と定義すると $\iota(a)$ は G の自己同型である. これを示せ. (これを a による**内部自己同型**あるいは**変換**と呼び, その全体 $\{\iota(a) \mid a \in G\}$ を $\boxed{\mathrm{Inn}\, G}$ と書く)

$\boxed{\mathbf{4}}$ (20 点) G を群とする. $a, b \in G$, $\sigma \in \mathrm{Aut}\, G$ に対して, $\boxed{\mathbf{3}}$ の記号の下で次のことを示せ.

(i) $\iota(ab) = \iota(a)\iota(b)$, $\iota(a^{-1}) = \iota(a)^{-1}$. (後者の右辺は $\iota(a)$ の逆写像を表す.)

(これより $\mathrm{Inn}\, G < \mathrm{Aut}\, G$. これを**内部自己同型群**と呼ぶ.)

(ii) $\sigma^{-1}\iota(a)\sigma = \iota(a^{\sigma})$. (以上から $\mathrm{Inn}\, G \triangleleft \mathrm{Aut}\, G$ がわかる.)

$\boxed{\mathbf{5}}$ (20 点) $\boxed{Z(G)} = \{a \in G \mid ax = xa\ (\forall x \in G)\}$ を G の**中心**と呼ぶ.
写像 $\iota : G \longrightarrow \mathrm{Inn}\, G$ $(a \mapsto \iota(a))$ は上の $\boxed{\mathbf{4}}$(i) により, 全準同型である. $\mathrm{Ker}\, \iota = Z(G)$ であることを示せ.
また, これより $Z(G) \triangleleft G$ であり $G/Z(G) \simeq \mathrm{Inn}\, G$ となることを説明せよ.

(ここより下には記入しないで下さい)

既習事項のまとめ

(1) 群の定義：集合 G に演算 $G \times G \to G$: $(a,b) \mapsto ab$ が与えられていて, 次の 3 条件を全て満たすとき G を 群 と呼ぶ；
(G1) この演算は結合法則をみたす,
(G2) 単位元 1 を持つ,
(G3) 各元 $a \in G$ に対して逆元 a^{-1} が存在する.

(2) 群 G の部分集合 $H \subset G$ が 部分群 であるとは, G の演算について
(SG1) $a, b \in H \implies ab \in H$
(SG2) $a \in H \implies a^{-1} \in H$
が成り立つことである.

(3) 記号 $H < G$ または $G > H$ は, G が群であり, H はその部分群であることを表すものとする.

(4) 群 G が アーベル群 とは任意の $a, b \in G$ について $ab = ba$ が成り立つことをいう. アーベル群の演算を $+$ で表して, そのアーベル群を 加群 と呼ぶことがある.

(5) 群 G 位数 とは集合としての G の元の個数のことで $o(G)$ と書かれる.

(6) 群 G の要素 g の 位数 とは $g^m = 1$ となる最小の正の整数 m のことである. その様な m が存在しないとき g の位数は ∞ であるという.

(7) G の部分群 H による 左剰余類 とは, 同値関係 $g_1 \equiv_\ell g_2 \bmod H$ (${g_1}^{-1}g_2 \in H$ で定義) で分類した類のことで, g_1 の属する類は g_1H である. 右剰余類 ($\equiv_\mathrm{r}$ で分類) も同様.

(8) $n|m$ は整数 n が整数 m を割り切ること, つまり m が n の倍数であることを意味する.

(9) $GL(n, \mathbf{Q}) = \{A \,|\, A$ はすべての成分が有理数である n 次正方行列で $\det(A) \neq 0\}$. これは行列の積を演算として群をなす.

(10) n 次対称群 (n 次置換の全体) S_n は互換の全体で生成される.

(11) $H < G$ のとき, 指数 $|G : H|$ とはこの右剰余類の類の個数である.

(12) ラグランジュの定理：群 G の部分群 H による右剰余類は Hg $(g \in G)$ の形にかける.
また $|G| = |G : H||H|$ が成り立つ.

(13) $G = \bigsqcup_j Hg_j$ から $G = \bigsqcup_j {g_j}^{-1}H$ が導かれるから, 右剰余類と左剰余類の "個数は" 等しい.

(14) 群 G の 正規部分群 とは, 任意の $g \in G$ に対して $gNg^{-1} \subset N$ なる部分群 $N < G$ のことである. (これは $gNg^{-1} = N$ とも $gN = Ng$ とも同値)
記号 $N \lhd G$ もしくは $G \rhd H$ で, G が群であり, N がその正規部分群であることを表すものとする.

(15) $N \lhd G$ のとき $H\backslash G$ と G/H は完全に一致し (つまり $Hg = gH$),
自然な演算 $(Hg_1)(Hg_2) = Hg_1g_2$ で群になる. それゆえ $H\backslash G = G/H$ を G の H による 剰余群 と呼ぶ.

(16) H_1, H_2 が $H_2 < H_1 < G$ なるとき, $|G : H_2| = |G : H_1||H_1 : H_2|$ が成り立つ.

(17) 群 G_1 から群 G_2 への写像 $\varphi : G_1 \to G_2$ が $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ を満たすとき, φ を 準同型 であるという.

(18) 単射であり全射である準同型を 同型 といい, $\varphi : G_1 \to G_2$ が同型写像であることを $\varphi : G_1 \xrightarrow{\sim} G_2$ または $G_1 \cong G_2$ で表す. $G_1 = G_2 = G$ のときは φ を G の 自己同型 (写像) という.

(19) 準同型 $\varphi : G_1 \to G_2$ について
$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{g \in G_1 \,|\, \varphi(g) = 1\}$,
$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(g) \,|\, g \in G_1\}$,
と定め, それぞれ φ の 核, 像 と呼ぶ.

(20) 準同型定理 I. 準同型 $\varphi : G_1 \to G_2$ について
$\mathrm{Ker}(\varphi) \lhd G_1$ であり, $G/\mathrm{Ker}(\varphi) \ni g\,\mathrm{Ker}(\varphi) \mapsto \varphi(g)$ なる写像は $G/\mathrm{Ker}(\varphi)$ から $\mathrm{Im}(\varphi)$ への同型写像である. つまり $G/\mathrm{Ker}(\varphi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(\varphi)$.

(21) G の自己同型写像の全体を $\boxed{\mathrm{Aut}\,G}$ と書く.

(22) 内部自己同型. ($\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$ を参照)

(23) 集合 X と群 G および写像 $X \times G \to X$ ($(x, \sigma) \mapsto x^\sigma$) が $x^1 = x$, $x^{\sigma\tau} = (x^\sigma)^\tau$ $(\forall x \in X, \forall \sigma, \tau \in G)$ を満すとき, G は X に 作用 する, または, X は G-集合 である, という.