

## 「代数的構造」中間試験問題兼解答用紙

(2013年度, 前期, 月曜 II 時限, 数学教育専修, 数理情報コース, 各3年)

試験時間 80 分, 教科書: 永尾 汎 著 「代数学」

- 注意** 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.  
**注意** 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.  
**注意** 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は 11:40 の時点の一回限りとする.

**1** (20 点) 群  $G$  の任意の  $t \in G$  を取る. このとき  $H < G \implies t^{-1}Ht < G$  が成り立つことを示せ.

**2** (20 点) Klein の 4 元群  $V = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} < S_4$  について  $V \triangleleft S_4$  を示せ.  
ただし,  $S_4$  が  $\{(12), (23), (34)\}$  で生成されることは既知とする (p.21, 問 7.10).

学籍番号	氏名	点
------	----	---

**3** (20点)  $G$  を群とし,  $a \in G$  に対して  $\iota(a): G \rightarrow G (x \mapsto x^{\iota(a)} = a^{-1}xa)$  と定義すると  $\iota(a)$  は  $G$  の自己同型である. これを示せ. (これを  $a$  による**内部自己同型**あるいは**変換**と呼び, その全体  $\{\iota(a) | a \in G\}$  を  $\text{Inn } G$  と書く)

**4** (20点)  $G$  を群とする.  $a, b \in G, \sigma \in \text{Aut } G$  に対して, **3** の記号の下で次のことを示せ.

(i)  $\iota(ab) = \iota(a)\iota(b), \iota(a^{-1}) = \iota(a)^{-1}$ . (後者の右辺は  $\iota(a)$  の逆写像を表す.)

(これより  $\text{Inn } G < \text{Aut } G$ . これを**内部自己同型群**と呼ぶ.)

(ii)  $\sigma^{-1}\iota(a)\sigma = \iota(a^\sigma)$ . (以上から  $\text{Inn } G \triangleleft \text{Aut } G$  がわかる.)

**5** (20点) 群  $G$  が集合  $X$  に作用しているとする.  $\alpha, \beta \in X$  と  $a \in G$  に対し,  $\beta = \alpha^a$  ならば  $G_\beta = a^{-1}G_\alpha a$  となることを示せ. ただし,  $G_\alpha = \{g \in G | \alpha^g = \alpha\}$  ( $\alpha$  の**固定群**と呼ばれる) である.

[Hint: まず,  $a^{-1}G_\alpha a$  の任意の元が  $\beta$  を固定することを示す.]

## 既習事項のまとめ

- (1) 群の定義：集合  $G$  に演算  $G \times G \rightarrow G : (a, b) \mapsto ab$  が与えられていて、次の 3 条件を全て満たすとき  $G$  を 群 と呼ぶ；  
(G1) この演算は結合法則をみたす、  
(G2) 単位元  $1$  を持つ、  
(G3) 各元  $a \in G$  に対して逆元  $a^{-1}$  が存在する.
- (2) 群  $G$  の部分集合  $H \subset G$  が 部分群 であるとは、 $G$  の演算について  
(SG1)  $a, b \in H \implies ab \in H$   
(SG2)  $a \in H \implies a^{-1} \in H$   
が成り立つことである.
- (3) 記号  $H < G$  または  $G > H$  は、 $G$  が群であり、 $H$  はその部分群であることを表すものとする.
- (4) 群  $G$  が アーベル群 とは任意の  $a, b \in G$  について  $ab = ba$  が成り立つことをいう。アーベル群の演算を  $+$  で表して、そのアーベル群を 加群 と呼ぶことがある.
- (5) 群  $G$  の 位数 とは集合としての  $G$  の元の個数のことで  $o(G)$  と書かれる.
- (6) 群  $G$  の要素  $g$  の 位数 とは  $g^m = 1$  となる最小の正の整数  $m$  のことである。そのような  $m$  が存在しないとき  $g$  の位数は  $\infty$  であるという.
- (7)  $G$  の部分群  $H$  による 左剰余類 とは、同値関係  $g_1 \equiv_l g_2 \pmod{H}$  ( $g_1^{-1}g_2 \in H$  で定義) で分類した類のことで、 $g_1$  の属する類は  $g_1H$  である。右剰余類 ( $\equiv_r$  で分類) も同様.
- (8)  $n|m$  は整数  $n$  が整数  $m$  を割り切ること、つまり  $m$  が  $n$  の倍数であることを意味する.
- (9)  $GL(n, \mathbf{Q}) = \{A \mid A \text{ はすべての成分が有理数である } n \text{ 次正方形行列で } \det(A) \neq 0\}$ . これは行列の積を演算として群をなす.
- (10)  $n$  次対称群 ( $n$  次置換の全体)  $S_n$  は互換の全体で生成される.
- (11)  $H < G$  のとき、指数  $|G : H|$  とはこの右剰余類の類の個数である.
- (12) ラグランジュの定理：群  $G$  の部分群  $H$  による右剰余類は  $Hg$  ( $g \in G$ ) の形にかける。  
また  $|G| = |G : H||H|$  が成り立つ.
- (13)  $G = \bigsqcup_j Hg_j$  から  $G = \bigsqcup_j g_j^{-1}H$  が導かれるから、右剰余類と左剰余類の“個数は”等しい.
- (14) 群  $G$  の 正規部分群 とは、任意の  $g \in G$  に対して  $gNg^{-1} \subset N$  なる部分群  $N < G$  のことである。(これは  $gNg^{-1} = N$  とも  $gN = Ng$  とも同値)  
記号  $N \triangleleft G$  もしくは  $G \triangleright N$  で、 $G$  が群であり、 $N$  がその正規部分群であることを表すものとする.
- (15)  $N \triangleleft G$  のとき  $H \setminus G$  と  $G/H$  は完全に一致し (つまり  $Hg = gH$ ),  
自然な演算  $(Hg_1)(Hg_2) = Hg_1g_2$  で群になる。それゆえ  $H \setminus G = G/H$  を  $G$  の  $H$  による 剰余群 と呼ぶ.
- (16)  $H_1, H_2$  が  $H_2 < H_1 < G$  なるとき、 $|G : H_2| = |G : H_1||H_1 : H_2|$  が成り立つ.
- (17) 群  $G_1$  から群  $G_2$  への写像  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  が  $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$  を満たすとき、 $\varphi$  を 準同型 であるという.
- (18) 単射であり全射である準同型を 同型 といい、 $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  が同型写像であることを  $\varphi : G_1 \xrightarrow{\sim} G_2$  または  $G_1 \cong G_2$  で表す。 $G_1 = G_2 = G$  のときは  $\varphi$  を  $G$  の 自己同型 (写像) という.
- (19) 準同型  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  について  
 $\text{Ker}(\varphi) = \{g \in G_1 \mid \varphi(g) = 1\}$ ,  
 $\text{Im}(\varphi) = \{\varphi(g) \mid g \in G_1\}$ ,  
と定め、それぞれ  $\varphi$  の 核, 像 と呼ぶ.
- (20) 準同型定理 I. 準同型  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  について  
 $\text{Ker}(\varphi)$  は  $G_1$  の正規部分群であり、 $G/\text{Ker}(\varphi) \ni g\text{Ker}(\varphi) \mapsto \varphi(g)$  なる写像は  $G/\text{Ker}(\varphi)$  から  $\text{Im}(\varphi)$  への同型写像である。つまり  $G/\text{Ker}(\varphi) \xrightarrow{\sim} \text{Im}(\varphi)$ .
- (21)  $G$  の自己同型写像の全体を  $\text{Aut } G$  と書く.
- (22) 内部自己同型. ([3], [4] を参照)
- (23) 集合  $X$  と群  $G$  および写像  $X \times G \rightarrow X$  ( $(x, \sigma) \mapsto x^\sigma$ ) が  $x^1 = x, x^{\sigma\tau} = (x^\sigma)^\tau$  ( $\forall x \in X, \forall \sigma, \tau \in G$ ) を満たすとき、 $G$  は  $X$  に 作用 する、または、 $X$  は  $G$ -集合 である、という.