2013 年度 「代数的構造」の中間試験範囲の問の list

問 10.1 次のことを示せ.
(i) $H < G \implies t^{-1}Ht < G\ (t \in G)$.
(ii) $b^{-1}ab \iff ab = ba$.

問 10.3 $N < G$ が $a^{-1}Na \subset N\ (\forall a \in G)$ をみたせば $a^{-1}Na = N$, したがって $N \lhd G$.

問 10.4 次を示せ.
(i) $H_i \lhd G\ (i = 1, \cdots, n) \implies H = \bigcap_{i=1}^{n} H_i \lhd G$.
(ii) $N \lhd G$ かつ $H < G$ であるとする. このとき
(1) $H \cap N \lhd H$.
(2) $NH = HN$, 従って $NH < G$.
(3) 特に $H \lhd G \implies NH \lhd G$.

問 10.5 Klein の 4 元群 $V = \{\, 1,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\,\} \subset S_4$ について,
$V \lhd G$ を示せ.

問 11.1 (i) Klein の 4 元群 V の乗積表をつくれ.
(ii) $G = \{\,(a, b) \mid a = \pm 1,\ b = \pm 1\,\} = \{\,(1, 1),\ (1, -1),\ (-1, 1),\ (-1, -1)\,\}$ において, 演算を $(a, b)(a'b') = (aa', bb')$ と定めるとき, G は群となるが, $G \simeq V$ であることを乗積表を比較して示せ.

問 11.3 $f : G \longrightarrow G'$ が準同型であるとき, 次のことを証明せよ.
(i) $f(a) = f(b) \iff ab^{-1} \in \mathrm{Ker}\, f = 1$. 従って, f が単射 $\iff \mathrm{Ker}\, f = 1$.
(ii) $H < G \implies f(H) < G'$. また f の H への制限 f_H を $f_H : H \longrightarrow G'\ (h \mapsto f(h))$ とすれば, f_H はまた準同型で, $\mathrm{Ker}\, f_H = H \cap \mathrm{f}$ となる.

問 11.5 $N \lhd G$ のとき $G/N = \overline{G}$, $Na = \overline{a}$ と表す. このとき $G \longrightarrow \overline{G}\ (a \mapsto \overline{a})$ は全準同型である (例 11.4). これについて次のことを示せ.
(i) $\mathrm{Ker}\, f = N$.
(ii) $H < G \implies f^{-1}(\overline{H}) = NH$.

問 11.9 $\mathbb{Z}$ を整数全体が加法についてなす群とする. $\langle a \rangle$ を a で生成されるある巡回群とする. このとき, 写像 $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \langle a \rangle$ を $f(m) = a^m$ で定義すると, これは準同型である.
(i) $\langle a \rangle$ が無限巡回群であれば $\mathrm{Ker}\, f = 0$ で, $\mathbb{Z} \simeq \langle a \rangle$.
(ii) $\langle a \rangle$ が位数 n の巡回群であれば $\mathrm{Ker}\, f = n\mathbb{Z}$ で, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \langle a \rangle$.

問 11.13 $a \in G$ に対して $\boxed{\iota(a)} : G \longrightarrow G\ (x \mapsto x^{\iota(a)} = a^{-1}xa)$ と定義すると $\iota(a)$ は G の自己同型である. (これを a による <u>内部自己同型</u> あるいは <u>変換</u> と呼び, その全体 $\{\iota(a) \mid a \in G\}$ を $\boxed{\mathrm{Inn}\, G}$ と書いて <u>内部自己同型群</u> と呼ぶ.)

問 11.14 G の自己同型写像の全体を $\boxed{\mathrm{Aut}\, G}$ と書く.
$a, b \in G$, $\sigma \in \mathrm{Aut}\, G$ に対して, 次のことを示せ.
(i) $\iota(ab) = \iota(a)\iota(b)$, $\iota(a^{-1}) = \iota(a)^{-1}$ (後者の右辺は $\iota(a)$ の逆写像を表す).
(ii) $\sigma^{-1}\iota(a)\sigma = \iota(a^\sigma)$.
(以上から $\mathrm{Inn}\, G \lhd \mathrm{Aut}\, G$ がわかる. [なぜか])

問 11.15 $\boxed{Z(G)} = \{a \in G \mid ax = xa\ (\forall x \in G)\}$ を G の <u>中心</u> と呼ぶ. 写像 $\iota : G \longrightarrow \mathrm{Inn}\, G$ $(a \mapsto \iota(a))$ は全準同型で $\mathrm{Ker}\, \iota = Z(G)$ であることを示せ. これより, $Z(G) \lhd G$ であり, $G/Z(G) \simeq \mathrm{Inn}\, G$ となることを示せ.

問 11.16 (追加) $H < G$ について $H^\sigma = H$ $(\forall \sigma \in \mathrm{Aut}\, G)$ が成り立つとき, H は G の <u>特性部分群</u> であるといわれる. いま, 自然数 n をとり固定するとき, 集合 $K = \{x \in G \mid x^n = 1\}$ は一般には G の部分群にはならない. しかし, もし $K < G$ であれば, K は G の特性部分群であることを示せ.
(Hint : $x \in K$ とすると $x^n = 1$ なので, 任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}\, G$ について $(x^n)^\sigma = 1^\sigma$. よって $(x^\sigma)^n = 1$. つまり $x^\sigma \in K$.)

問 12.1 G が集合 X に作用していて, $\alpha, \beta \in X$ について, ある $\sigma \in G$ により $\beta = \alpha^\sigma$ となるとき, α と β は G-<u>同値</u> であるといい, $\boxed{\alpha \underset{G}{\sim} \beta}$ と表す. この関係 $\underset{G}{\sim}$ は同値関係であることを示せ.

問 12.2 群 G が集合 X に作用しているとする. $\alpha \in X$ に対し, $\boxed{G_\alpha} = \{a \in G \mid \alpha^a = \alpha\}$ とおく. $G_\alpha < G$ であることを示せ. G_α を α の G における <u>安定部分群</u> と呼ぶ.

問 12.3 群 G が集合 X に作用しているとする. $\alpha, \beta \in X$ と $a \in G$ に対し, $\beta = \alpha^a$ ならば $G_\beta = a^{-1}G_\alpha a$ となることを示せ.

以上.