

《複素関数 I》 中間試験問題兼解答用紙

(2013 年度, 前期, 木曜 II 時限, 数学教育専修, 数理情報コース, 各 3 年)
 試験時間 80 分, 教科書: 佐藤/吉田 共著 「初歩から学べる 複素解析」

- 注意** 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退場は 11:40 の時点の一回限りとする.
注意 4. 早めにご解答できたら念入りに検算せよ.

1 (10 点) de Moivre の公式を用いて $z^5 = i$ を解け.

3 (10 点) 方程式 $z\bar{z} + (1 + 3i)z + (1 - 3i)\bar{z} + 1 = 0$ は
 どんな図形を表すか.

2 (15 点) $\triangle ABC$ の辺 BC, CA, AB の中点を D, E, F とするとき, 次の式が成り立つことを 複素数の計算で示せ.

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = \frac{4}{3}(AD^2 + BE^2 + CF^2).$$

4 (15 点) 集合 $\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = 0\}$ ($z_1 \neq z_2$) を
 図示せよ. (hint: $\frac{w_1}{w_2}$ が純虚数 $\iff \vec{0w_1}$ と $\vec{0w_2}$ のなす角は \circ .)

学籍番号

氏名

点

5 (15 点) $z = e^{i\theta}$ のとき $\frac{1-z}{1+z} = -i \tan \frac{\theta}{2}$ であることを示せ.

7 (15 点) 関数 $w = \lambda \frac{z-a}{z-\bar{a}}$ ($|\lambda| = 1, \operatorname{Im} a > 0$) は上半平面 $\operatorname{Im} z > 0$ を単位円 $|w| < 1$ に写すことを示せ.
(hint: 関数を z について解き, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z-\bar{z}) > 0$ に代入して整理.)

6 (10 点) 極限 $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ は存在するか. 存在するならばその値を求め, 存在しないならば理由を述べよ.

8 (10 点) 関数 $w = \frac{1}{z}$ の導関数を定義に従って求めよ.