実施 2010.7.26, IV 時限

《立体の幾何学》 期末試験問題兼解答用紙

(2010 年度, 月曜 IV 時限, 数学教育専修, 数理情報コース, 各 2 年)

試験時間 80 分,　教科書: 三宅著 「線形代数学」

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は 15:45 の時点の一回限りとする.
注意 4. **検算を！**… 連立方程式を解いたならその解を元の方程式に代入して成り立つか, などなど工夫して.

1 (25 点) 次の線形写像 $T : \boldsymbol{R}^5 \to \boldsymbol{R}^4$ について (i), (ii) を求めよ:

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 10 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

(i) 核 $\mathrm{Ker}(T) = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^5 \mid T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}\}$ の 1 組の基底と退化次数 $\mathrm{null}(T) = \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$ を求めよ.
(ii) 像 $\mathrm{Im}(T) = \{T(\boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{R}^4 \mid \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^5\}$ の 1 組の基底と階数 $\mathrm{rank}(T) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$ を求めよ.

3 (20 点) 次の $\boldsymbol{R}^3$ の基を（この順序に応じて）シュミットの方法で正規直交化せよ.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

学籍番号	氏名	点

$\boxed{\mathbf{2}}$ (25 点) 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) 固有多項式 $g_A(t) = |tE - A|$ と固有値を求めよ.
(2) $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ について, 各固有値 λ に対する固有空間 $W(\lambda; T_A)$ の基を 1 組求めよ.
(3) A は対角化できるか. できるのであれば対角化せよ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ (15 点) 2 次形式 $q(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 + 2x_1x_2 + 4{x_2}^2 + 6x_2x_3 + {x_3}^2$ を直交変換で対角化せよ. ($\boxed{\mathbf{2}}$ の結果を利用してよい.) また, 空間 $\boldsymbol{R}^3$ の中で $q(x_1, x_2, x_3) = 1$ はどんな曲面 (楕円面, 一様双曲面, 二葉双曲面のいづれか) を表すか, 答えよ.

$\boxed{\mathbf{5}}$ (15 点) 行列 A が正則であるための必要十分条件は, A の固有値がどれも 0 でないことであることを証明せよ.

(ここより下は記入しないで下さい)