既習事項のまとめ

(1) 群の定義：集合 G に演算 $G \times G \to G : (a,b) \mapsto ab$ が与えられていて, 次の 3 条件を全て満たすとき G を <u>群</u> と呼ぶ；
(G1) この演算は結合法則をみたす,
(G2) 単位元 e を持つ,
(G3) 各元 $g \in G$ に対して逆元 g^{-1} が存在する.

(2) 群 G の部分集合 $H \subset G$ が <u>部分群</u> であるとは, G の演算について H 自身が群になっていることである.

(3) 記号 $H < G$ または $G > H$ は, G が群であり, H はその部分群であることを表すものとする.

(4) 群 G が <u>アーベル群</u> とは任意の $a, b \in G$ について $ab = ba$ が成り立つものをいう. アーベル群の演算を $+$ で表して, そのアーベル群を <u>加群</u> と呼ぶことがある.

(5) 群 G <u>位数</u> とは集合としての G の元の個数のことで $|G|$ と書かれる.

(6) 群 G の要素 g の <u>位数</u> とは $g^m = e$ となる最小の正の整数 m のことである. その様な m が存在しないとき g の位数は ∞ であるという.

(7) G の部分群 H による <u>右剰余類</u> とは, 同値関係 $g_1 \sim g_2 \iff g_1 {g_2}^{-1} \in H$ で分類した類のことである. 左剰余類も同様.

(8) $H < G$ のとき, <u>指数</u> $[G : H]$ とはこの右剰余類の類の個数である.

(9) <u>ラグランジュの定理</u>：群 G の部分群 H による右剰余類は Hg $(g \in G)$ の形にかける.
また $|G| = [G : H]|H|$ が成り立つ.

(10) $G = \bigsqcup_j Hg_j$ から $G = \bigsqcup_j {g_j}^{-1}H$ が導かれるから, 右剰余類と左剰余類の "個数は" 等しい.

(11) 群 G の <u>正規部分群</u> とは, 任意の $g \in G$ に対して $gNg^{-1} \subset N$ なる部分群 $N < G$ のことである. (これは $gNg^{-1} = N$ とも $gN = Ng$ とも同値)
記号 $N \lhd G$ もしくは $G \rhd H$ で, G が群であり, N がその正規部分群であることを表すものとする.

(12) $N \lhd G$ のとき $H\backslash G$ と G/H は完全に一致し (つまり $Hg = gH$),
自然な演算 $(Hg_1)(Hg_2) = Hg_1g_2$ で群になる. それゆえ $H\backslash G = G/H$ を G の H による <u>剰余群</u> と呼ぶ.

(13) H_1, H_2 が $H_2 < H_1 < G$ なるとき, $[G : H_2] = [G : H_1][H_1 : H_2]$ が成り立つ.

(14) 群 G_1 から群 G_2 への写像 $\varphi : G_1 \to G_2$ が $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ を満たすとき, φ を <u>準同型</u> であるという.

(15) 単射であり全射である準同型を <u>同型</u> といい, $\varphi : G_1 \to G_2$ が同型写像であることを $\varphi : G_1 \xrightarrow{\sim} G_2$ または $G_1 \cong G_2$ で表す.

(16) 準同型 $\varphi : G_1 \to G_2$ について
$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{g \in G_1 \,|\, \varphi(g) = e\}$,
$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(g) \,|\, g \in G_1\}$,
と定め, それぞれ φ の <u>核</u>, <u>像</u> と呼ぶ.

(17) <u>準同型定理 I</u>. 準同型 $\varphi : G_1 \to G_2$ について
$\mathrm{Ker}(\varphi)$ は G_1 の正規部分群であり, $G/\mathrm{Ker}(\varphi) \ni g\,\mathrm{Ker}(\varphi) \mapsto \varphi(g)$ なる写像は $G/\mathrm{Ker}(\varphi)$ から $\mathrm{Im}(\varphi)$ への同型写像である. つまり $G/\mathrm{Ker}(\varphi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(\varphi)$.

宿題の未提出者へ：試験範囲の問題 (= 今まで宿題として課した問題) のすべてをレポートにまとめるて早急に提出せよ. ただし, わからない点があればそれを明確にして質問を記述する.
わかったふりをして解答を書くことが絶対にない様に！

実施：2010 年 12 月 20 日 (月) 16:30-18:00, K-22 室

「群の構造」中間試験問題兼解答用紙

(2010 年度, 月曜 V 時限, 数学教育専修, 数理情報コース, 各 2 年)

試験時間 80 分, 教科書: 三宅著「入門代数学」

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は 17:30 の時点の一回限りとする.

A, B, C の各群から 1 問づつと **D** の計 4 問を解答せよ. (各 25 点)

A1 巡回群はアーベル群であることを証明せよ.

A2 巡回群の部分群は巡回群であることを示せ.

A3 巡回群の剰余群は巡回群であることを示せ.

A4 群 $G \neq \{e\}$ が $\{e\}$ 以外に真の部分群を持たなければ, G は位数が素数の巡回群であることを示せ.

B1 加群 $\mathbb{Z}$ の部分加群はある整数 m を用いて $m\mathbb{Z} = \{ma \,|\, a \in \mathbb{Z}\}$ と書けることを示せ.

B2 $a \in \mathbb{Z}$ を含む $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の剰余類を $\overline{a}$ と書く. $\overline{a}$ が $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の生成元であるための必要十分条件は $\gcd(a, m) = 1$ であることを示せ.

学籍番号	氏名	点

$\boxed{\textbf{C1}}$ 群 G の任意の元 g が $g^2 = e$ をみたすならば, G はアーベル群であることを示せ.

$\boxed{\textbf{C2}}$ 群 G が 2 つの部分群 H と K の和集合であるならば, $G = H$ または $G = K$ であることを示せ.

(Hint : 背理法で示すのために, $G \neq H$ かつ $G \neq K$ だとする. このとき, $h \in H, \notin K$ なる h と, $k \in K, \notin H$ なる k が存在する [確認せよ]. このとき hk が H か K に属することができるか考察せよ.)

$\boxed{\textbf{C3}}$ 有限群 G の部分集合 S の元の個数について $2|S| > G$ であるとき $G = SS$ であることを示せ.

(Hint : 任意の $g \in G$ に対して $|gS^{-1}| = |S| > |G|/2$ ゆえ, $S \cap gS^{-1} \neq \emptyset$ でなければならない [なぜか]. そこで $s_1 = g{s_2}^{-1} \in S \cap gS^{-1}$ とすれば ⋯)

$\boxed{\textbf{D}}$ 実数全体のなす加法群 $\mathbb{R}$ と正の実数全体のなす乗法群 $\mathbb{R}_+^\times$ は同型であることを示せ.

—————————— (ここより下には記入しないで下さい) ——————————

教科書の解答の訂正

問題 1.2 の問 12 ☆ 有限群 G の部分群 H, K の指数 $[G : H]$ と $[G : K]$ が互いに素ならば $G = HK$ であることを示せ.

教科書の解答では HK が群になることが前提にされている様なので, それではマズイ！

これを証明するのに次を示しておく.
補題 Z $H < G$, $K < G$ で $[G : H]$ が有限のとき, $[K : H \cap K] \leqq [G : H]$ である.
(証明). $H \cap K < K$ なので写像

$$\varphi : K/H \cap K \to G/H, \quad k(H \cap K) \mapsto kH$$

が定義される. これは単射である. 実際

$$\varphi(k(H \cap K)) = \varphi(k'(H \cap K)) \iff kH = k'H \implies kH \cap K = k'H \cap K$$

だからである. ゆえに

$$|K/H \cap K| \leqq |G/H|,$$
$$\therefore [K : H \cap K] \leqq [G : H]$$

が示された □

(☆ の証明)
いま集合としての直積 $H \times K$ を考えて, そこから集合 HK への写像

$$f : H \times K \to HK, \quad f(h, k) = hk$$

を調べる. $h_1, h_2 \in H$ と $k_1, k_2 \in K$ が $h_1k_1 = h_2k_2$ となったとすると ${h_2}^{-1}h_1 = k_2{k_1}^{-1}$ となる. これは $H \cap K$ の元である. これを x と書くことにすると ${h_2}^{-1}h_1 = x$, $k_2{k_1}^{-1} = x$ なので $h_2 = h_1x^{-1}$, $k_2 = xk_1$ である. つまり

$$h_1k_1 = h_2k_2 \iff \text{ある } x \in H \cap K \text{ について } \ h_2 = h_1x^{-1} \ \text{ かつ } \ k_2 = xk_1.$$

よって

$$|H| \times |K| = |H \times K| = |HK| \times |H \cap K|. \tag{1}$$

さて $[G : H]$ と $[G : K]$ は互いに素で, $[G : H \cap K] = [G : K][K : H \cap K] = [G : H][H : H \cap K]$ なので $[G : H] | [K : H \cap K]$. これと上記の 補題 Z で得た $[K : H \cap K] \leqq [G : H]$ を合せると $[G : H] = [K : H \cap K]$ がわかる. これを上の式に代入すれば

$$[G : H \cap K] = [G : K][G : H]$$

を得る. つまり

$$\frac{|G|}{|H \cap K|} = \frac{|G|}{|K|} \times \frac{|G|}{|H|},$$
$$\therefore \ |G| = \frac{|H| \times |K|}{|H \cap K|} = |HK| \quad (\because (1))$$

よつて $G = HK$.